PENENTUAN INVERS FUNGSI HIPERBOLIK

Teguh Wibowo

Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Syarat fungsi mempunyai invers adalah korespondensi satu-satu. Fungsi sinus hiperbolik dan tangen hiperbolik mempunyai invers karena kedua fungsi tersebut satu-satu pada setiap daerah asalnya. Fungsi cosinus hiperbolik tidak mempunyai invers karena fungsi ini tidak satu-satu, akan tetapi dengan membatasi daerah asal untuk $x \geq 0$ fungsi cosinus hiperbolik mempunyai invers. Dengan mengubah dalam bentuk logaritma natural, invers fungsi hiperbolik akan lebih mudah untuk diselesaikan.

Kata kunci: *invers fungsi hiperbolik, logaritma natural*

PENDAHULUAN

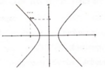
Dalam matematika banyak sekali digunakan campuran dari e^x dan e^{-x}. Kombinasi-kombinasi dari e^x dan e^{-x} ini diberi nama khusus. Tiga fungsi hasil kombinasi ini adalah fungsi sinus hiperbolik, cosinus hiperbolik dan tangen hiperbolik. Masih ada fungsi-fungsi lain yang merupakan hasil kombinasi e^x dan e^{-x} yang tidak kami bahas pada tulisan ini.

Apabila suatu fungsi dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka fungsi tersebut akan memiliki invers atau balikan. Demikian juga fungsi hiperbolik dengan membatasi pada daerah asalnya fungsi ini akan mempunyai invers. Fungsi hiperbolik merupakan hasil kontruksi dari bentuk eksponen e^x dan e^{-x}, lalu bagaimana menentukan invers fungsi hiperbolik ini? Cara yang lebih mudah adalah mengubah invers fungsi hiperbolik ke dalam bentuk logaritma natural. Sehingga apabila invers fungsi hiperbolik diubah

dalam bentuk logaritma natural akan lebih mudah dicari penyelesaiannya.

FUNGSI HIPERBOLIK

Ada kesamaan dasar antara fungsi hiperbolik dengan fungsi trigonometri. Fungsi trigonometri berhubungan erat dengan persamaan lingkaran satuan $x^2+y^2=1$, sedangkan fungsi hiperbolik diidentikan dengan persamaan $x^2-y^2=1$. Kesamaan dasar fungsi hiperbolik, seperti $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ pada trigonometri adalah $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$. Penulisan sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik disingkat dengan sinh dan cosh.



gambar 1

Jika titik P(x,y) terletak pada hiperbol satuan $x^2-y^2=1$, kita dapat mendefinisikan cosh x = a dan sinh x = b (sesuai konsep pada lingkaran satuan). Salah satu pilihan yang tepat untuk cosh x dan sinh x adalah kombinasi dari fungsi eksponen natural yaitu $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ dan $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

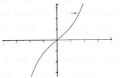
Definisi 1

Fungsi sinus hiperbolik didefinisikan oleh:

$$\boxed{\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})}$$

Daerah asal dan daerah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real.

Sketsa grafik fungsi sinus hiperbolik:



gambar 2

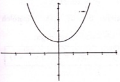
Definisi 2

Fungsi cosinus hiperbolik didefinisi- kan oleh:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Daerah asal adalah himpunan bilangan real dan daerah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real pada selang $[1, \infty)$.

Sketsa grafik fungsi cosinus hiperbolik:



gambar 3

Untuk tanh x kita bisa memperoleh-nya dengan:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

$$= \frac{(e^{2x} - 1)e^{-x}}{(e^{2x} + 1)e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Definisi 3

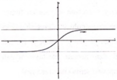
Fungsi tangen hiperbolik didefinisi-kan oleh:

$$\boxed{\tanh x = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}}$$

atau $\tanh x = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Daerah asal adalah himpunan semua bilangan real dan daerah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real pada selang (-1,1).

Sketsa grafik fungsi tangen hiperbolik:



gambar 4

INVERS FUNGSI HIPERBOLIK

Syarat agar fungsi mem-punyai invers adalah korespondensi satu-satu. Fungsi sinus hiperbolik dan tangen hiperbolik adalah satu-satu, sehingga kedua fungsi tersebut mempunyai invers. Untuk fungsi

cosinus hiperbolik tidak mempunyai invers, karena fungsinya tidak satu-satu (lihat gambar 3). Akan tetapi dengan membatasi pada daerah asalnya fungsi cosinus hiperbolik dapat mempunyai invers yaitu untuk $x \geq 0$.

1. Invers Fungsi Sinus Hiperbolik

Invers fungsi sinus dinyatakan dengan $y = \sinh^{-1} x$ atau y = arcsinh x , adalah fungsi yang memenuhi y = arcsinh x jika dan hanya jika x = sinh y. Daerah asal dan daerah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real.

Fungsi sinus hiperbolik dapat didefinisikan dalam bentuk eksponensial, maka agar lebih mudah diselesaikan invers fungsi sinus hiperbolik dapat dinyatakan dalam bentuk logaritma natural.

Dari definisi 1 diperoleh, y = arcsinh x jika dan hanya jika x = sinh y maka:

$$x = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})$$

$$2x = e^{y} - e^{-y}$$

$$e^{y} - e^{-y} - 2x = 0$$

$$e^{2y} - 1 - 2xe^{y} = 0$$

$$(e^{y})^{2} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

Dengan menggunakan rumus abc menghasilkan:

$$e^{y} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^{2} + 4}}{2}$$

$$e^{y} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^{2} + 1}}{2}$$

$$e^{y} = x \pm \sqrt{x^{2} + 1}$$

Karena $e^{y} > 0$, maka diperoleh $e^{y} = x + \sqrt{x^{2} + 1}$ sehingga:

$$\boxed{y = \text{arcsinh } x = \ln(x + \sqrt{x^{2} + 1})}$$

2. Invers Fungsi Cosinus Hiperbolik

Invers fungsi cosinus hiperbolik dinyatakan dengan $y = \cosh^{-1} x$ atau y = arccosh x, adalah fungsi yang memenuhi y = arccosh x jika dan hanya jika x = cosh y, untuk $x \geq 1$ dan $y \geq 0$.

Dari x = cosh y, dimana $y \geq 0$ diperoleh:

$$x = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$$

$$2x = e^y + e^{-y}$$

$$e^y + e^{-y} - 2x = 0$$

$$e^{2y} + 1 - 2xe^y = 0$$

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$$

Penyelesaian persamaan ini menghasilkan:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

$$e^y = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 - 1}}{2}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Diketahui bahwa $x \geq 1$ dan $y \geq 0$, sehingga $e^y \geq 1$ mengakibatkan kita memilih tanda positif, maka diperoleh $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Jadi

$$\boxed{y = \text{arccosh}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}$$

untuk $x \geq 1$.

3 Invers Fungsi Tangen Hiperbolik

Invers fungsi tangen hiperbolik ditulis $y = \tanh^{-1} x$ atau y = arctanh x, adalah fungsi yang memenuhi y = arctanh x jika dan hanya jika x = tanh y, untuk $-1 < x < 1$ dan $y \in R$. Jika dinyatakan dalam bentuk logaritma natural diperoleh:

$$x = \tanh y$$

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} - xe^{2y} = 1 + x$$

$$e^{2y}(1 - x) = 1 + x$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$e^y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$y = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

Sehingga diperoleh:

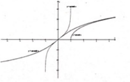
$$\boxed{y = \text{arctanh}\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}}$$

untuk $-1 < x < 1$

4 . Grafik Invers Fungsi Hiperbolik

Grafik invers fungsi hiperbolik dapat dilukis dengan mencerminkan grafik fungsi hiperbolik terhadap garis y = x. Grafik invers fungsi sinus hiperbolik mempunyai daerah asal dan daerah hasil pada himpunan semua bilangan real . Sedangkan

grafik invers fungsi cosinus hiperbolik daerah asalnya adalah selang $[0,\infty)$ dan daerah hasil pada selang $[1,\infty)$. Daerah hasil dari grafik invers tangen hiperbolik adalah himpunan semua bilangan real dan daerah hasilnya pada selang (-1,1).



gambar 5

Contoh pengunaan dalam penyelesaian soal.

1. Tentukan nilai invers fungsi hiperbolik dari:
   a. y = arcsinh 2
   b. y = arccosh $\sqrt{3}$
   c. y = arctanh $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

Jawab:

a. arcsinh x = $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\text{arcsinh } 2 = \ln(2+\sqrt{2^2+1})$$
$$= \ln(2+\sqrt{5})$$
$$= \ln 4{,}24$$
$$= 1{,}44$$

b. arccosh x = $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$$\text{arccosh } \sqrt{3} = \ln(\sqrt{3}+\sqrt{3-1})$$
$$= \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$
$$= \ln 3{,}15$$
$$= 1{,}15$$

c. arctanh x = $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

$$\text{arctanh}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(-\frac{2}{3})}{1-(-\frac{2}{3})}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln 0{,}2$$
$$= -\,0{,}8$$

2. Diketahui y = arctanh $\dfrac{7}{25}$, tentukan nilai dari cos y !

Jawab:

$$\text{arctanh } x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$\text{arctanh } \frac{7}{25} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{7}{25}}{1-\frac{7}{25}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{32}{25}}{\frac{18}{25}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{16}{9}$$
$$= 0{,}29$$

Maka cos y = cos 0,29 = 73,28°

SIMPULAN

Invers fungsi hiperbolik lebih mudah diselesaikan apabila diubah dalam bentuk logaritma natural. Bentuk-bentuk tersebut adalah:

arcsinh x = $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

arccosh x = $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

untuk $x \geq 1$

arctanh x = $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

untuk $-1 < x < 1$

Bentuk logaritma natural dari invers fungsi hiperbolik yang lain dapat dikembangkan sesuai dengan algoritma pada tulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

Leithold , Louis. 1976. *The Calculus With Analytic Geometry*. Newyork: Harper & Row, Publishers

Martono , Koko. 1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga

Purcell, Edwin J, Dale Varberg (I Nyoman Susila dkk). 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Jakarta: Erlangga.

Roberts, A. Wayne. 1968: *Introductory Calculus*. Minnesota:

Schwartz, Abraham. 1964. *Analytic Geometry and Calculus*. Newyork:Holt, Rinehart and Winston Publishers