GRAF ALIRAN SINYAL PADA SISTEM PERSAMAAN *CHAPMAN- KOLMOGOROV*

Puji Nugraheni
Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo
Jalan KH. A. Dahlan 3 Purworejo
e-mail: puji_pwr@telkom.net

Abstrak

Tujuan dari penulisan ini adalah mengetahui konstruksi bentuk graf aliran sinyal pada sistem persamaan Chapman-Kolmogorov. Persamaan Chapman-Kolmogorov dapat dikonstruksikan ke dalam bentuk graf aliran sinyal. Cara mengkonstruksi graf aliran sinyal yang diperoleh dari sistem persamaan Chapman Kolmogorov dengan metode Langsung adalah menyatakan sistem persamaan Chapman Kolmogorov ke dalam bentuk persamaan matriks.

Kata Kunci: persamaan *Chapman Kolmogorov*, graf aliran sinyal

Pendahuluan

Salah satu contoh bentuk proses stokastik adalah Rantai Markov. Rantai Markov memuat rangkaian kejadian atau kedudukan yang kemunculannya berdasarkan peluang tertentu yang hanya tergantung pada kedudukan sebelumnya. Rantai Markov dibagi menjadi dua macam yaitu Rantai Markov waktu diskrit dan Rantai Markov waktu kontinu. Dalam makalah ini yang akan dibahas adalah Rantai Markov waktu diskrit. Rantai Markov waktu diskrit adalah proses stokastik yang distribusi peluangnya memenuhi sifat Markov berikut ini.

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$
$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ dan untuk setiap kedudukan $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$. Ini menunjukkan peluang kedudukan pada saat $n+1$ bergantung pada saat n.

Pada rantai Markov terdapat kedudukan awal, maka rantai Markov dengan $X_n, n \geq 0$ dilengkapi dengan distribusi awal $\pi_0(x) = P\{X_0 = x\}$ untuk setiap $x \in S$. Distribusi awal $\pi_0(x)$ menyatakan peluang bahwa pada saat proses dimulai, rantai

Markov pada kedudukan x. Distribusi awal $\pi_0(x)$ dari rantai Markov dengan ruang kedudukan $S = \{0, 1, 2, ..., n\}$ dapat dipandang sebagai vektor baris berukuran $n+1$, yaitu:

$\pi_0(x) = (\pi_0(0), \pi_0(1), \pi_0(2), ..., \pi_0(n))$.

Misalkan $X_n, n \geq 0$ adalah rantai Markov yang mempunyai ruang kedudukan S dan fungsi transisi P. Jika $\pi(x), x \in S$, adalah bilangan non negatif yang jumlahnya sama dengan satu $\left(\sum_{x\in S} \pi(x) = 1\right)$ dan jika $\sum_x \pi(x)P(x, y) = \pi(y), y \in S$ maka π disebut distribusi stasioner. Misalkan distribusi stasioner π ada dan

$\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = \pi(y), y \in S$ .... (1)

maka tanpa memperhatikan distribusi awalnya, distribusi dari X_n mendekati π untuk $n \to \infty$. Untuk kasus seperti ini, π dikatakan distribusi dengan kedudukan tetap *(steady state distribution)*.

Jika π adalah distribusi stasioner dan jika persamaan (1) berlaku, dengan distribusi awal π_0, maka:

$P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x)P^n(x, y), y \in S$ ...(2)

Dari persamaan (1) dan (2) maka untuk $n \to \infty$ didapatkan:

$$
\begin{aligned}
w_j &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_x \pi_0(x)P^n(x, y) \\
&= \sum_x \pi_0(x) \lim_{n\to\infty} P^n(x, y) \\
&= \sum_x \pi_0(x)\pi(y) = \pi(y)\sum_x \pi_0(x) \\
&= \pi(y) = \lim_{n\to\infty} P^n(x, y)
\end{aligned}
$$

Jika

$\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = w_j = \lim_{n\to\infty} P^{n-1}(x, y)$,

maka didapatkan $w_j = \sum_i w_i P(x, y)$, untuk $j = 0.1, 2, \ldots, n$. Persamaan $w_j = \sum_i w_i P(x, y)$ dapat diubah kedalam bentuk matriks menjadi $w = wP$. Selanjutnya, $w = wP$ disebut dengan persamaan *Chapman Kolmogorov*.

Pembahasan

Konstruksi bentuk graf Aliran Sinyal pada persamaan Chapman-Kolmogorov mengacu pada kon-struksi bentuk graf Aliran Sinyal pada sistem linear. Berikut ini uraian dalam mengkonstruksi graf Aliran Sinyal pada persamaan Chapman Kolmogorov. Diberikan sistem persamaan Chapman Kolmogorov dari suatu rantai Markov yang dinyatakan dalam persamaan matriks sebagai berikut.

$$w = wP \qquad \text{.....................} \quad (3)$$

dengan $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$

dan $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$

Persamaan (3) dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$$

(4)

Dengan demikian, persamaan (4) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w_1 &= p_{11}w_1 + p_{12}w_2 + p_{13}w_3 + \ldots + p_{1n}w_n \\ w_2 &= p_{21}w_1 + p_{22}w_2 + p_{23}w_3 + \ldots + p_{2n}w_n \\ w_3 &= p_{31}w_1 + p_{32}w_2 + p_{33}w_3 + \ldots + p_{3n}w_n \\ &\vdots \\ w_n &= p_{n1}w_1 + p_{n2}w_2 + p_{n3}w_3 + \ldots + p_{nn}w_n \end{aligned}$$

(5)

Bentuk persamaan (5) adalah sistem persamaan dengan *n* persamaan sehingga dapat ditulis menjadi sebagai berikut.

$$w(I - P) = 0 \quad \text{............................} \quad (6)$$

Persamaan (6) adalah sistem persamaan dengan *n* persamaan dalam *n* bilangan tak diketahui. Oleh karena itu, persamaan (6) mempunyai pemecahan lebih dari satu. Selanjutnya, karena merupakan rantai Markov maka pemecahan dari persamaan (6) harus memenuhi:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n = 1 \quad \text{........} \quad (7)$$

Menurut aturan Cramer, jika $AX=B$ adalah sistem persamaan yang terdiri dari *n* persamaan linear dalam *n* bilangan yang tak diketahui sehingga

$\det(A) \neq 0$, maka sistem persamaan tersebut mempunyai pemecahan

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_1 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots,$$

$$x_1 = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

di mana A_j adalah matriks yang didapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke-*j* dari *A* dengan entri-entri dalam matriks *B*. Jadi, dari persamaan (6) dan (7) maka didapatkan persamaan sebagai berikut.

$$w(I-P)_j^* = V_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

di mana $(I-P)_j^*$ adalah matriks yang didapatkan dari matriks $I-P$ dengan mengganti entri-entri dari suatu kolom ke-*j* dengan 1 dan V_j adalah vektor baris dengan semua entrinya nol, kecuali pada entri ke-*j*nya adalah 1. Jadi,

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_n \end{pmatrix}(I-P)_j^*$$

$$= \begin{pmatrix} 1-p_{11} & -p_{12} & \cdots & -p_{1j-1} & 1 & -p_{1j+1} & \cdots & -p_{1n} \\ -p_{21} & 1-p_{22} & \cdots & -p_{2j-1} & 1 & -p_{2j+1} & \cdots & -p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_{(j-1)1} & -p_{(j-1)2} & \cdots & 1-p_{j-1j-1} & 1 & -p_{j-1j+1} & \cdots & -p_{(j-1)n} \\ -p_{j1} & -p_{j2} & \cdots & -p_{j(j-1)} & 1 & -p_{j(j+1)} & \cdots & -p_{jn} \\ -p_{(j+1)1} & -p_{(j+1)2} & \cdots & -p_{j+1j-1} & 1 & 1-p_{j+1j+1} & \cdots & -p_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_{n1} & -p_{n2} & \cdots & -p_{n(j-1)} & 1 & -p_{n(j+1)} & \cdots & 1-p_{nn} \end{pmatrix}$$

Bentuk $(I-P)_j^* + I$ pada persamaan (9) dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$(I-P)_j^* + I =$$

$$\begin{pmatrix} 1-p_{11} & -p_{12} & \cdots & -p_{1j-1} & 1 & -p_{1j+1} & \cdots & -p_{1n} \\ -p_{21} & 1-p_{22} & \cdots & -p_{2j-1} & 1 & -p_{2j+1} & \cdots & -p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_{(j-1)1} & -p_{(j-1)2} & \cdots & 1-p_{j-1j-1} & 1 & -p_{j-1j+1} & \cdots & -p_{(j-1)n} \\ -p_{j1} & -p_{j2} & \cdots & -p_{j(j-1)} & 1 & -p_{j(j+1)} & \cdots & -p_{jn} \\ -p_{(j+1)1} & -p_{(j+1)2} & \cdots & -p_{j+1j-1} & 1 & 1-p_{j+1j+1} & \cdots & -p_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_{n1} & -p_{n2} & \cdots & -p_{n(j-1)} & 1 & -p_{n(j+1)} & \cdots & 1-p_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}
2-p_{11} & -p_{12} & \cdots & -p_{1j-1} & 1 & -p_{1j+1} & \cdots & -p_{1n} \\
-p_{21} & 2-p_{22} & \cdots & -p_{2j-1} & 1 & -p_{2j+1} & \cdots & -p_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-p_{(j-1)1} & -p_{(j-1)2} & \cdots & 2-p_{j-1j-1} & 1 & -p_{j-1j+1} & \cdots & -p_{(j-1)n} \\
-p_{j1} & -p_{j2} & \cdots & -p_{j(j-1)} & 2 & -p_{j(j+1)} & \cdots & -p_{jn} \\
-p_{(j+1)1} & -p_{(j+1)2} & \cdots & -p_{j+1j-1} & 1 & 2-p_{j+1j+1} & \cdots & -p_{j+1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-p_{n1} & -p_{n2} & \cdots & -p_{n(j-1)} & 1 & -p_{n(j+1)} & \cdots & 2-p_{nn}
\end{pmatrix}
$$

atau dapat diubah kedalam bentuk: $(2I-P)_j^*$ .... (10)

Akibat persamaan (10), maka persamaan (9) menjadi sebagai berikut.

$$
w^T = \begin{bmatrix} -V_j & (2I-P)_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ w^T \end{bmatrix} \qquad \text{........................} \quad (11)
$$

Persamaan (11) dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{j-1} \\ w_j \\ w_{j+1} \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}
=\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
2-p_{11} & -p_{12} & \cdots & -p_{1(j-1)} & 1 & -p_{1j+1)} & \cdots & -p_{1n} \\
-p_{21} & 2-p_{22} & \cdots & -p_{2(j-1)} & 1 & -p_{2(j+1)} & \cdots & -p_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-p_{(j-1)1} & -p_{(j-1)2} & \cdots & 2-p_{(j-1)(j-1)} & 1 & -p_{(j-1)(j+1)} & \cdots & -p_{(j-1)n} \\
-p_{j1} & -p_{j2} & \cdots & -p_{j(j-1)} & 2 & -p_{j(j+1)} & \cdots & -p_{jn} \\
-p_{(j+1)1} & -p_{(j+1)2} & \cdots & -p_{(j+1)(j-1)} & 1 & 2-p_{(j+1)(j+1)} & \cdots & -p_{(j+1)n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-p_{n1} & -p_{n2} & \cdots & -p_{n(j-1)} & 1 & -p_{n(j+1)} & \cdots & 2-p_{nn}
\end{bmatrix}\right]
\begin{bmatrix} v_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{j-1} \\ s_j \\ w_{j+1} \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}
$$

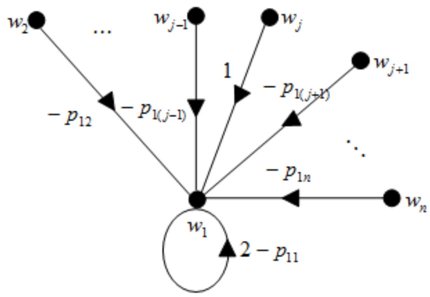
sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (2-p_{11})w_1 - p_{12}w_2 - \ldots - p_{1(j-1)}w_{j-1} + w_j - p_{1(j+1)}w_{j+1} - \ldots - p_{1n}w_n \\
w_2 &= -p_{21}w_1 + (2-p_{22})w_2 - \ldots - p_{2(j-1)}w_{j-1} + w_j - p_{2(j+1)}w_{j+1} - \ldots - p_{2n}w_n \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
w_{j-1} &= -p_{(j-1)1}w_1 - p_{(j-1)2}w_2 - \ldots + (2-p_{(j-1)(j-1)})w_{j-1} + w_j - p_{(j-1)(j+1)}w_{j+1} - \ldots - p_{(j-1)n}w_n \\
w_j &= -v_0 - p_{j1}w_1 - p_{j2}w_2 - \ldots p_{j(j-1)}w_{j-1} + 2w_j - p_{j(j+1)}w_{j+1} - \ldots - p_{jn}w_n \\
w_{j+1} &= -p_{(j+1)}w_1 - p_{(j+1)2}w_2 - \ldots - p_{(j+1)(j-1)}w_{j-1} + w_j + (2-p_{(j+1)(j+1)})w_{j+1} - \ldots - p_{(j+1)n}w_n
\end{aligned}
$$

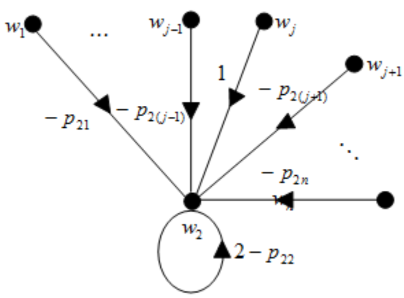
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$w_n = -p_{n1}w_1 - p_{n2}w_2 - \ldots - p_{n(j-1)}w_{j-1} + w_j - p_{n(j+1)}w_{j+1} - \ldots + (2 - p_{nn})w_n \quad (12)$$

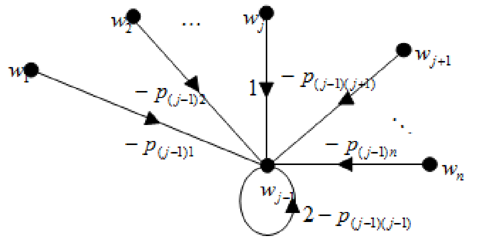
Maka sistem persamaan *Chapman Kolmogorov* dapat dinyatakan dalam bentuk graf Aliran Sinyal untuk peubah $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ sebagai berikut.



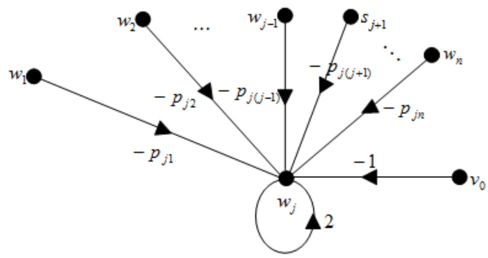
Gambar 1.
Graf Aliran Sinyal untuk peubah w_1



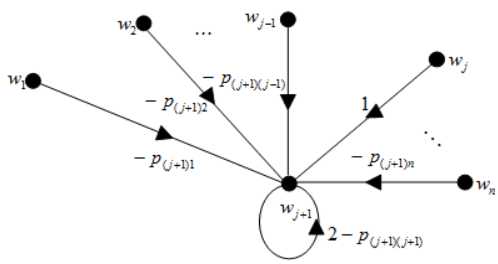
Gambar 2.
Graf Aliran Sinyal untuk peubah w_2



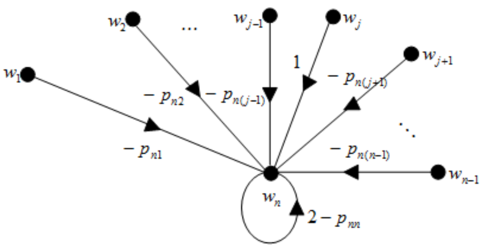
Gambar 3.
Graf Aliran Sinyal untuk peubah w_{j-1}



Gambar 4.
Graf Aliran Sinyal untuk peubah w_j



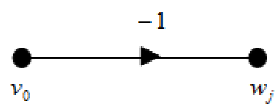
Gambar 5.
Graf Aliran Sinyal untuk peubah w_{j+1}



Gambar 6.
Graf Aliran Sinyal untuk peubah w_n

Berdasarkan gambar graf Aliran Sinyal untuk setiap peubah $w_1, w_2, \ldots, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}, \ldots, w_n$, maka dihasilkan pola graf Aliran Sinyal untuk peubah $w_1, w_2, \ldots, w_{j-1}$, $w_j, w_{j+1}, \ldots, w_n$ sebagai berikut.

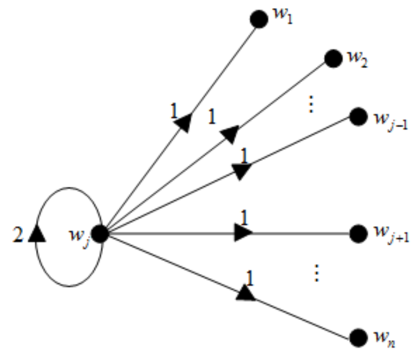
1. Terdapat 1 busur yang menghubungkan simpul v_0 dengan simpul peubah w_j yaitu busur (v_0, w_j) dengan bobot -1 yang ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 7.
Busur (v_0, w_j) dengan bobot -1

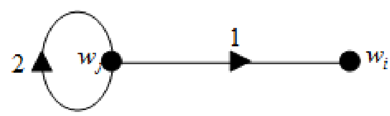
w_j = peubah ke-*j*, untuk $j = 1, 2, \ldots, n$

2. Terdapat n busur yang menghubungkan simpul peubah w_j dengan simpul peubah $w_1, w_2, \ldots, w_{j-1}, w_j,\ w_{j+1}, \ldots, w_n$ yaitu busur $(w_j, w_1), (w_j, w_2), \ldots,$ $(w_j, w_{j-1}), (w_j, w_j), (w_j, w_{j+1}), \ldots,$ (w_j, w_n) seperti pada gambar berikut.



Gambar 8.
Busur $(w_j, w_1), (w_j, w_2), \ldots, (w_j, w_{j-1}),$ $(w_j, w_j), (w_j, w_{j+1}), \ldots, (w_j, w_n)$

Ilustrasi pada gambar 8. dapat dinyatakan secara umum dalam bentuk sebagai berikut.



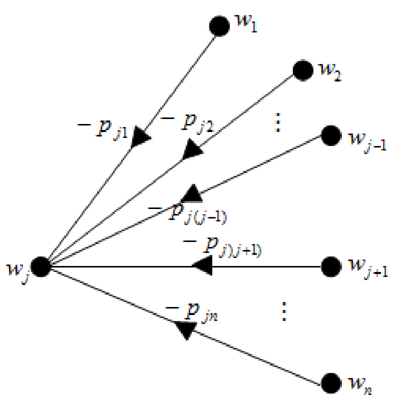
Gambar 9.
Busur (w_j, w_i)

w_j = peubah ke-*j*, untuk $j = 1, 2, \ldots, n$

w_i = peubah ke-*i*, untuk $j = 1, 2, \ldots, n$

3. Terdapat $n-1$ busur yang menghubungkan simpul peubah

$w_1, w_2, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_n$ dengan simpul peubah w_j yaitu busur $(w_1, w_j), (w_2, w_j), \ldots,$ $(w_{j-1}, w_j),$ $(w_{j+1}, w_j), \ldots, (w_n, w_j)$ seperti pada gambar berikut.



Gambar 10.
Busur $(w_1, w_j), (w_2, w_j), \ldots, (w_{j-1}, w_j),$
$(w_{j+1}, w_j), \ldots, (w_j, w_n)$

Ilustrasi pada gambar 10. dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut.

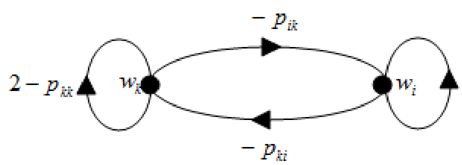
Gambar 11.
Busur (w_i, w_j)

w_j = peubah ke-*j*, untuk $j = 1,2,\ldots,n$

w_i =peubah ke-*i*, untuk $i = 1,2,\ldots,$ $j-1, j+1,\ldots,n$

$-p_{ji}$ = bobot pada busur (w_j, w_i) untuk $i = 1,2,\ldots, j-1, j+1,\ldots,n$

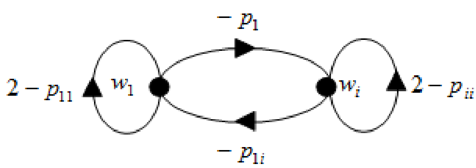
4. Terdapat sikel yang terdiri atas 2 simpul yaitu simpul peubah w_k dan w_i yang saling terhubung satu sama lain dengan setiap simpulnya terdapat busur gelang seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 12.
Ilustrasi sikel peubah w_k dan w_i

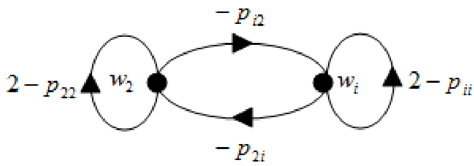
Penjabaran lebih lanjut pada sikel yang memuat simpul w_k dan w_i berdasarkan gambar 12 ditunjukkan sebagai berikut.

untuk $k = 1$



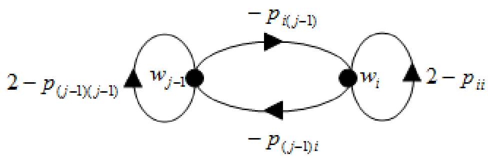
dengan $i = 2,\ldots, j-1, j+1,\ldots,n$

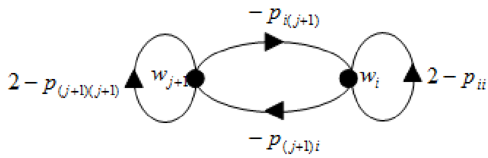
untuk $k = 2$



dengan $i = 3, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$

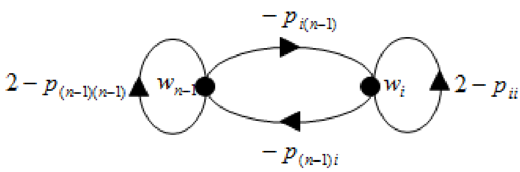
untuk $k = j-1$





dengan $i = j+2, \ldots, n$

untuk $k = n-1$



dengan $i = n$

Gambar 13.
Ilustrasi penjabaran sikel dengan 2 simpul w_k dan w_i

Penutup

Berdasarkan pola graf Aliran Sinyal untuk peubah pada sistem linear maka dihasilkan konstruksi keseluruhan graf Aliran Sinyal pada sistem persamaan Chapman Kolmogorov.

Daftar Pustaka

Chatrand, G.1985. *Introduction Graph Theory*.New York: Dover Publication, Inc

Chen, Wai Kai.1976.*Applied Graph Theory Graphs and Electrical Networks*.New York: North-Holland Publishing Company.

Harary, F.1969. *Graph Theory*. Massachussets: Addison – Wesley Publishing Company Inc.

Hoel, Paul G., Port, Sidney C. & Stone,Charles J.1972. *Intro-duction to Stochastic Processes*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Mardiyono, S.1996. *Matematika Diskret*. Yogyakarta: FMIPA IKIP Yogyakarta

Narsingh, Deo.1997. *Graph Theory with Applications to Engi-nering and Computer*.New Delhi: Prentice Hall of India.

Sutarno, Heri., Priatna, Nanang. & Nurjanah.2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: UPI Press.

Wilson, Robin J & Beineke, Lowell W.1979. *Application of Graph Theory*. London: Academic Press.