SIFAT-SIFAT TOPOLOGI RUANG LINEAR

Nila Kurniasih
Program Studi Pendidikan Matematika
Jalan KHA Dahlan 3 Purworejo

Abstrak

Penulisan ini bertujuan menyelidiki sifat-sifat yang berlaku di dalam topologi ruang linear. Metode yang digunakan adalah studi literatur. Berdasarkan definisi pada topologi ruang linier maka sifat-sifat yang berlaku pada (X,τ) *adalah: koleksi persekitaran* $N(x)$ *pada topologi ruang linier aditif berakibat f kontinu pada 0* $[=(0,0)]$. *Setiap persekitaran* $U \in N(x)$ *dari 0 dalam topologi ruang linier absorbsing. Setiap persekitaran* $U \in N(x)$ *dari 0 dalam topologi ruang linier balanced dan balanced tertutup dari 0. Topologi ruang linier merupakan: ruang Hausdorff jika* $\{0\}$ *tertutup, ruang regular, ruang* T_3, *ruang regular lengkap (completely regular), dan generalisasi topologi grup.*

Kata Kunci: topologi, topologi ruang linier

Pendahuluan

Ruang linier atau ruang vektor, adalah suatu ruang yang ditentukan oleh himpunan tak kosong dengan dua operasi yang berlaku padanya. Oleh karena itu suatu himpunan dikatakan ruang linier jika memenuhi dua operasi aljabar, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar yang memenuhi sifat yang berlaku pada aksioma lapangan (*field*). Ruang linear mempunyai dua kemungkinan yaitu bebas linear dan tak bebas linier. Pembentuk (generator) yang menjadi basis ruang linear adalah himpunan yang saling bebas linier.

Topologi ruang linier merupakan suatu pasangan (X,τ) di mana X ruang linier dan τ suatu topologi pada X sedemikian hingga operasi aljabar dalam X kontinu. Lebih spesifik tentang kontinuitas, dikatakan bahwa dua pemetaan $(x,y) \to x+y$ dan $(\alpha,x) \to \alpha x$ kontinu, yang pertama didefinisikan pada $X \times X \to X$ dan yang kedua didefinisikan pada $R \times X \to X$.

Topologi ruang linier merupakan proses topologi pada ruang linier atau ruang metrik. Operasi pada ruang linier bersifat kontinu dan konsekuensi dari definisi tersebut adalah fungsi atau pemetaan yang didefinisikan merupakan suatu homeomorphisma, selain kontinu dan terbuka juga memenuhi fungsi bijektif. Setelah mengetahui aksioma yang harus terpenuhi dan pembentuk (generator) dalam topologi ruang linier maka perlu diselidiki sifat-sifatnya yang merupakan analogi dari sifat-sifat yang berlaku dalam topologi ruang lain yang sebenarnya merupakan implikasi dari proses topologi.

Landasan Teori

Teori-teori pendukung pada landasan teori ini dirujuk dari S.Lipschutz (1981), E. Hutahean (1979), W. Cheney (2001), S.L. Gupta dan N Rani (2000), S. Hu (1967), B. Kifli dan M. Usman (1985), E.G Milewski (1994), E.J. Purcell dan D. Varberg (1987), P. Silaban dan H. Anton (1985), A.E. Taylor dan D.C Lay (1985), Rudin (1976).

a. Definisi Topologi

Topologi dilambangkan dengan τ dan merupakan koleksi dari himpunan-himpunan sedemikian hingga :

i. Himpunan kosong, ϕ, adalah anggota koleksi
ii. Irisan dari dua anggota koleksi juga di dalam koleksi
iii. Gabungan dari subkoleksi juga di dalam koleksi

Jika τ adalah suatu topologi, didefinisikan X adalah gabungan dari semua anggota τ. Katakanlah X adalah ruang dari τ dan τ adalah topologi pada X. Pasangan (X, τ) disebut ruang topologi. Masing-masing anggota τ disebut himpunan terbuka pada X. Dengan aksioma di atas, maka X adalah terbuka.

Topologi dalam himpunan X, yaitu koleksi takkosong $\tau \subseteq 2^{x}$ dari himpunan-himpunan terbuka dalam X, disebut himpunan terbuka yang memenuhi empat aksioma yaitu: 1) Himpunan kosong ϕ adalah terbuka; 2) Himpunan X itu sendiri terbuka; 3) Gabungan dari koleksi himpunan terbuka adalah terbuka; 4) Irisan dari dua himpunan terbuka adalah terbuka.

Himpunan X dikatakan tertopologi jika topologi τ diberikan dalam X. Himpunan tertopologi X disebut ruang topologi, singkatnya ruang, dan topologi τ dalam X disebut topologi dari ruang X. Himpunan-himpunan terbuka dalam τ disebut himpunan-himpunan terbuka dalam ruang X.

b. Definisi Ruang Topologi

Pasangan (X,τ) yang terdiri atas himpunan X dan topologi τ pada X disebut ruang topologi.

i. Karena 2^x adalah koleksi dari semua himpunan bagian-himpunan bagian dari X, 2^x adalah topologi. Topologi ini disebut topologi diskrit yang mengandung anggota maksimal yang mungkin dari himpunan.

ii. X merupakan perwakilan dari himpunan. Koleksi $\tau = \{\phi, X\}$ adalah topologi pada X. Topologi ini disebut topologi tak diskrit (topologi trivial) pada X yang mengandung anggota paling sedikit dari himpunan.

Anggota topologi disebut titik. Anggota dari τ disebut himpunan terbuka dari ruang topologi (X,τ).

c. Aksioma Separasi

Definisi c.1. (Ruang T_0)

Ruang (X,τ) disebut ruang T_0 jika untuk dua titik yang berbeda $a,b \in X$, terdapat paling sedikit satu persekitaran yang tidak mengandung titik lain.

Definisi c.2. (Ruang T_1)

Ruang Topologi (X,τ) disebut ruang T_1, jika setiap himpunan yang beranggotakan satu titik adalah tertutup, yaitu, $\forall a \in X; \{a\} = \overline{\{a\}}$.

Definisi c.3. (Ruang T_2 (Ruang Hausdorff atau ruang terpisah))

Ruang topologi adalah ruang hausdorff jika untuk masing-masing pasangan dari titik $a \neq b$, dua himpunan yang disjoint A dan B ada, sedemikian hingga $a \in A, b \in B, A \cap B = \phi$.

Definisi c.4. (Ruang Regular)

Ruang Topologi (X,τ) disebut regular jika sebarang himpunan tertutup tertentu $F \in X$ dan sebarang titik $x \in X$, sedemikian hingga $x \notin F$, terdapat himpunan terbuka U dan V sedemikian hingga $F \subset U, x \in X$ dan $U \cap V = \phi$.

Definisi c.5. (Ruang T_3)

Ruang T_1 regular disebut ruang T_3.

Definisi c.6. (Ruang Normal)

Ruang topologi (X,τ) disebut normal jika dua himpunan tertutup disjoint tertentu F_1 dan F_2 dalam X, terdapat himpunan terbuka U dan V, sedemikian hingga $F_1 \subset U$ dan $F_2 \subset V$.

Definisi c.7. (Ruang T_4)

Ruang normal yang juga ruang T_1 disebut ruang T_4.

Definisic.8. (Ruang Lengkap Regular)

Ruang topologi (X,τ) adalah lengkap regular jika untuk sebarang himpunan bagian tertutup F dari X dan sebarang $a \in X$, sedemikian hingga $a \notin F$, fungsi kontinu $f : X \to [0,1]$ ada, sedemikian hingga untuk setiap $x \in F$, $f(x)=1$ dan $f(a)=0$.

d. Basis dan Sub Basis untuk Topologi

Basis untuk topologi adalah koleksi bagian ß dari τ sedemikian hingga setiap himpuan terbuka adalah gabungan dari himpunan-himpunan di dalam ß. Basis dari topologi τ di dalam X, artinya koleksi bagian ß dari τ sedemikian hingga setiap himpunan U dalam τ adalah himpunan-himpunan terbuka dalam ß. Dengan kata lain, untuk setiap $U \in \tau$ dan masing-masing point $x \in U$, terdapat $V \in$ ß sedemikian hingga $x \in V \in U$. Himpunan-himpunan terbuka dari basis ß yang diberikan disebut basis himpunan terbuka dari ruang X.

Definisi d.1.

Himpunan S dalam X adalah *balanced* jika $\alpha x \in S$ dan α adalah skalar sedemikian hingga $|\alpha| \le 1$. (Beberapa penulis menggunakan *circled*; buku Bourbaki menggunakan *equilibre*). Jika S adalah sembarang himpunan dalam X *balanced hull* dari S adalah himpunan $\{\alpha s : s \in S, |\alpha| \le 1\}$.

Definisi d.2.

Himpunan S dalam X adalah *absorbsing* jika untuk masing-masing $x \in X$ terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $\alpha x \in S$. jika $0 < |\alpha| \le 1$ Dengan kata lain, S adalah *absorbsing* jika untuk masing-masing $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian hingga $x \in \alpha S$ jika $|\alpha| \ge r$.

Teorema d.3.

Diberikan B suatu kelas dari himpunan-himpunan bagian himpunan tak kosong X. Kemudian ß adalah basis untuk suatu topologi pada X jika dan hanya jika ß memenuhi dua sifat :

(i) $X = \cup\{B : B \in$ ß$\}$

(ii)Untuk sembarang $B, B^* \in$ ß, $B \cap B^*$ adalah gabungan dari anggota-anggota ß, atau jika $p \in B \cap B^*$ maka terdapat $B_p \in$ ß sedemikian hingga $p \in B_p \subset B \cap B^*$.

Sub basis dari topologi τ dalam X, artinya subkoleksi σ dari τ sedemikian hingga irisan berhingga (= irisan dari koleksi-koleksi ber-hingga) dari himpunan-himpunan terbuka dalam σ membentuk basis dari τ. Dengan kata lain, untuk setiap $U \in$ τ dan masing-masing $x \in U$, terdapat bilangan berhingga dari himpunan-himpunan terbuka dalam σ, katakalah $W_1, \ldots\ldots, W_n$, sedemikian hingga $x \in W_1 \cap \ldots\ldots \cap W_n \subset U$. Himpuan-himpunan terbuka dalam subbasis σ yang diberikan akan disebut subbasis himpunan-himpunan terbuka dari ruang X. (Hu:1967:108)

Suatu subbasis untuk topologi τ adalah sub koleksi S dari τ sedemikian hingga irisan berhingga dari himpunan-himpunan dalam S membentuk basis untuk τ. (Cheney:2001:363)

(X ,τ) adalah suatu topologi ruang. Suatu kelas S dari himpunan-himpunan terbuka dari X yaitu $S \subset$ τ adalah sub basis untuk topologi τ pada X jika dan hanya jika irisan berhingga dari anggota-anggota S membentuk basis untuk τ. (Lipschutz:1981:88)

e. Pengertian Topologi Ruang linier

Definisi e.1

Topologi ruang linier adalah suatu pasangan (X ,τ) di mana X adalah ruang linier dan τ adalah suatu topologi pada X sedemikian hingga operasi aljabar dalam X adalah kontinu. Lebih spesifik tentang kontinuitas, dikatakan bahwa dua pemetaan $(x, y) \to x + y$ dan $(\alpha, x) \to \alpha x$ adalah kontinu, yang pertama didefinisikan pada $X \times X \to X$ dan yang kedua didefinisikan pada $R \times X \to X$.

Himpunan yang ada dalam koleksi τ disebut himpunan-himpunan terbuka, dan persekitaran dari titik x adalah suatu himpunan U sedemikian hingga untuk suatu himpunan terbuka O terdapat $x \in O \subset U$. Aksioma kontinuitas di atas dapat dinyatakan dalam istilah persekitaran berikut:

1) Jika U adalah persekitaran $x+y$, maka terdapat persekitaran V dari x dan persekitaran W dari y sedemikian hingga $v+w$ berada di dalam U di mana $v \in V$ dan $w \in W$ dan 2) Jika U adalah persekitaran dari αx, maka terdapat persekitaran V dari α dan W dari x sedemikian hingga $\lambda w \in U$ di mana $\lambda \in V$ dan $w \in W$. Jika $v \in V$ dan $w \in W$ adalah himpunan terbuka, maka U adalah himpunan terbuka, dan $f^{-1}(U)$ juga terbuka. Jika $\lambda \in V$ dan $w \in W$ adalah himpunan terbuka maka U adalah himpunan terbuka, dan $f^{-1}(U)$ juga terbuka. Operasi penjumlahan dan perkalian skalar dalam topologi ruang linier digunakan untuk mengoperasikan persekitaran, karena setiap persekitaran adalah himpunan terbuka dan hasil dari kedua operasi juga merupakan himpunan terbuka.Jadi operasi dalam topologi ruang linier adalah kontinu.

Metode Penelitian

Penulisan ini menggunakan metode studi/telaah literatur, yaitu segala bahan dan sumber diambil dari buku, jurnal dan artikel yang sudah ada.

Pembahasan

Berdasarkan definisi tentang topologi ruang linier dan teorema kontinuitas fungsi, dapat diasumsikan bahwa topologi ruang linier memenuhi sifat homeomorphisma. Sehingga sifat-sifat yang berlaku dalam topologi ruang linier adalah sebagai berikut :

1. Koleksi persekitaran $N(x)$ dalam topologi ruang linier adalah aditif, berakibat f kontinu pada $0\ [=(0,0)]$.

   Lebih lanjut, sifat-sifat topologi ruang linier akan dapat diidentifikasi pada titik 0. Berdasarkan definisi, identifikasi sifat selalu melibatkan persekitaran. Berikut ini adalah definisi persekitaran pada suatu titik, kemudian diaplikasikan pada titik 0.

   Definisi persekitaran D.1.1.

   Persekitaran dari titik $x \in X$ adalah suatu himpunan $V \subset X$ sedemikian hingga terdapat himpunan terbuka $U \subset X$ dengan $x \in U \subset V$. Koleksi dari semua persekitaran dari x ditulis $N(x)$. Suatu subkoleksi β dari $N(x)$ disebut basis persekitaran dari x atau singkatnya, basis pada x jika diberikan $U \in \beta$ sedemikian hingga $U \subset V$.

Jika β adalah basis persekitaran dari 0, maka $N(0)$ terdiri atas semua persekitaran dengan sifat V mengandung beberapa $U \in \beta$. Karena translasinya adalah suatu homeomorphisma, maka $N(x):\{x+V : V \in N(0)\}$. Dari β dapat ditemukan kembali $N(x)$ untuk x di dalam X. Fakta yang sangat berguna adalah bahwa topologi adalah *completely determined* (lengkap tertentu) oleh persekitaran dari 0.

Definisi D.1.2.

Suatu koleksi S dari himpunan-himpunan bagian dari ruang linier disebut aditif jika untuk masing-masing $U \in S$ terdapat $V \in S$ dengan $V + V \subset U$.

Lemma D.1.3

Dalam topologi ruang linier, himpunan V adalah persekitaran dari titik z jika dan hanya jika $-z+V$ adalah persekitaran dari 0.

Bukti :

Berlaku z adalah bilangan tetap, serta definisikan $f(x) = x + z$. Pemetaan ini mengirimkan 0 ke z. V adalah persekitaran dari titik z. Karena f kontinu, maka $f^{-1}(V)$ adalah persekitaran dari 0. Sekarang selidiki bahwa

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{x : f(x) \in V\} \\ &= \{x : x + z \in V\} \\ &= -x + V \end{aligned}$$

Sebaliknya, anggaplah $-z+V$ adalah persekitaran dari 0. $f^{-1}(x) = x - z$ dan f^{-1} juga kontinu, memetakan z ke 0. Karena itu $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ membawa $-z+V$ ke suatu persekitaran dari z .Tetapi

$$\begin{aligned} &\left(f^{-1}\right)^{-1}(-z+V) \\ &= \{x : f^{-1}(x) \in -z+V\} \\ &= \{x : x - z \in -z+V\} \\ &= V \end{aligned}$$

Teorema D.1.4

Diberikan X ruang linier dan ruang topologi. Definisikan $f : X \times X \to X$ dengan

$f(x,y)=x+y$. Kemudian f kontinu pada 0 $[=(0,0)]$ jika dan hanya jika $N(x)$ aditif.

Bukti :

Diberikan $U \in N(x), V \in N(x)$ dengan $V+V \subset U$. Kemudian $V \times V \in N(X \times X)$ dan $f(V \times V)=V+V \subset U$.

Maka f kontinu pada 0.

Diberikan $U \in N(x)$, terdapat $W \in N(X \times X)$ dengan $f(W) \subset U$

Dapat diasumsikan bahwa $W = V_1 \times V_2, V_i \in N(x)$,

$V = V_1 \cap V_2$. Maka

$V+V \subset V_1 + V_2 = f[W] \subset U$

2. Setiap persekitaran U dari 0 dalam topologi ruang linier adalah *absorbsing*.

Teorema D.2.1

Setiap persekitaran U dari 0 dalam topologi ruang linier X adalah absorbsing.

Bukti :

$x \in X$ dan mendefinsisikan $u: K \to X$ dengan $u(t)=tx$. Karena u kontinu, terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $|t| < \varepsilon$ mengakibatkan $u(t) \in U$ yaitu $tx \in U$. Setiap persekitaran U dari 0 dalam topologi ruang linier termasuk suatu persekitaran *balanced* dan *balanced* tertutup dari 0.

Lemma D.3.1.

Setiap persekitaran U dari 0 dalam Topologi Ruang Linier X termasuk suatu persekitaran balanced dari 0.

Bukti :

Pemetaan $u: K \times X$ diberikan oleh $u(\alpha)=\alpha x$ adalah kontinu. Kemudian terdapat $W \in N(K \times X)$ dengan $u(W) \subset U$. Dapat diasumsikan $W = V_1 \times V_2$ dimana V_1, V_2 adalah persekitaran pada 0 dalam K, X.

Kemudian $V_1 \supset \{\alpha : |\alpha| \le \varepsilon\}$ untuk $\varepsilon > 0$. Kemudian $V \in N$ karena $V \supset \varepsilon V_2$ [teorema 4.D.7], juga, V adalah balanced dan $V \subset U$.

Teorema D.3.2

X adalah topologi ruang linier dan $S \subset X$. Kemudian $\overline{S} = \cap\{S+U : U \in N\}$ tepatnya, $\overline{S} \subset S+U$ untuk setiap $U \in N$.

Bukti :

$x \in \overline{S}$, $U \in N$. Dengan Lemma 4.D.9, diasumsikan bahwa U adalah balanced. Karena $x+U$ adalah persekitaran dari x, bertemu dengan S. Maka $x \in S-U = S+U$. Sebaliknya, $x \notin S$. Kemudian x mempunyai persekitaran (boleh ditulis $x+U$, U persekitaran balanced dari 0) yang tidak bertemu S; karena itu $x \notin S-U = S+U$. Maka $x \notin \cap\{S+U : U \in N\}$.

Teorema D.3.4

Setiap persekitaran U dari 0 dalam topologi ruang linier X termasuk persekitaran balanced tertutup pada 0.

Bukti :

$V \subset N$ dengan $V+V \subset U$ [teorema 4.D.5]. Dengan lemma 4.D.9, $W \in N$ adalah balanced, $W \subset V$. Maka $W \subset U$ [teorema 4.D.10] dan mengingatkan untuk melihat bahwa $\overline{W}$ adalah balanced dengan $0 \le \alpha \le 1$. Dengan argument dari teorema 4.D.7, $\alpha\overline{W} \subset \overline{W}$ dan juga $\alpha\overline{W} \subset \overline{\alpha W} \subset \overline{W}$ karena W adalah balanced.

Teorema D.3.5

Topologi Ruang Linier X mempunyai basis β pada 0 dengan sifat-sifat sebagai berikut:

a. *Masing-masing anggota* β *balanced dan absorbsing*
b. *Jika* $U \in \beta$, *terdapat* $V \in \beta$ *sehingga* $V + V \subset U$
c. *Jika* U_1 *dan* U_2 *di dalam* β, *terdapat* $U_3 \in \beta$ *sedemikian hingga* $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.
d. *Sebaliknya, suatu koleksi tertentu tak nol dari* β *dari himpunan bagian-himpunan bagian tak nol dari ruang linier* X *sedemikian hingga* β *memenuhi a sampai c, terdapat topologi linier tunggal untuk* X *yang mengan-dung* β *sebagai basis pada 0.*

Bukti :

Jika X adalah topologi ruag linier, maka β adalah koleksi dari semua persekitaran *balanced* dari 0, yang sama dengan koleksi *balanced hulls* dari semua persekitaran dari 0.

Anggap β adalah koleksi dengan sifat-sifat a sampai c. Untuk masing-masing $x \in X$, $N(x)$ adalah koleksi dari semua himpunan bagian-himpunan bagian dari X yang terdiri dari suatu himpunan dengan bentuk $x+U$ untuk $U \in \beta$.

Himpunan S didefinisikan terbuka jika $S \in N(x)$ untuk masing-masing $x \in S$. Jelasnya, himpunan kosong dan seluruh ruang X adalah terbuka dengan definisi ini. Ini mudah untuk melihat bahwa gabungan dari sebarang himpunan terbuka adalah terbuka. Dari sifat c, irisan berhingga dari himpunan terbuka adalah terbuka. Karena itu, himpunan terbuka membentuk suatu topologi pada X. Untuk masing-masing x, $N(x)$ adalah koleksi persekitaran dari x untuk topologi ini. Selanjutnya, dari konstruksi $N(x)$ bahwa β adalah basis dari persekitaran 0.

Akan dibuktikan bahwa topologi sesuai dengan struktur linier X. Kontinuitas dari penjumlahan dalam X, mengikuti b. Sebelum membuktikan kontinuitas dari perkalian skalar, selidiki yang berikut ini:

Jika $U \in \beta$ dan $\alpha \neq 0$, terdapat $V \in \beta$ sedemikian hingga $\alpha V \subset U$.

Untuk membuktikan ini, selidiki terlebih dahulu dengan b dan induksi bahwa $U \in \beta$ dan n adalah integer positif, terdapat $V \in \beta$ sedemikian hingga $2^n V \subset U$. Ambil n; $|\alpha| \leq 2^n$, dan $V \in \beta$ sedemikian hingga $2^n V \subset U$. Karena V *balanced*, $\alpha 2^n V \subset V$, yaitu, $\alpha V \subset 2^n V \subset U$.

Anggaplah x_0 dan α_0 adalah tetap. Akan ditunjukkan bahwa $U \in \beta$ tertentu, terdapat $V \in \beta$ dan $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $\alpha x \in \alpha_0 x_0 + U$ (yaitu $\alpha x - \alpha_0 x_0 \in U$) di mana $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ dan $x \in x_0 + V$. Untuk sebarang x dan α,

$$\alpha x - \alpha_0 x_0 = \alpha(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0$$

.

Dari b, terdapat $W \in \beta$ sedemikian hingga $W + W \in U$. Karena W absorbsing, ambillah $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $\delta x_0 \in W$ jika $|\delta| < \varepsilon$. Ambillah $V \in \beta$ sedemikian hingga $(\varepsilon + |\alpha_0|)V \subset W$.

Anggaplah bahwa x dan α ada, sedemikian hingga $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ dan $x - x_0 \in V$, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Kemudian $(\alpha - \alpha_0)x_0 \in W$. Jelasnya, $|\alpha| \leq |\alpha - \alpha_0| + |\alpha_0| < \varepsilon + |\alpha_0|$.

Karena V balanced, maka $\frac{\alpha}{\varepsilon + |\alpha_0|}(x - x_0) \in V$ atau $\alpha(x - x_0) \in (\varepsilon + |\alpha_0|)V \subset W$.

Tetapi kemudian $\alpha x - \alpha_0 x_0 \in W + W \subset U$. Ini melengkapi pembuktian bahwa perkalian adalah kontinu.

Pernyataan tunggal dari teorema berdasarkan kenyataan bahwa sistem persekitaran pada masing-masing titik adalah *completely determined* dengan basis dari persekitaran 0.

3. Suatu topologi ruang linier adalah ruang Hausdorff jika dan hanya jika himpunan $\{0\}$ tertutup.

Teorema D.4.1.

Suatu topologi ruang linier adalah ruang Hausdorff jika dan hanya jika 0 adalah satu satunya elemen meliputi semua persekitaran 0.

Bukti :

Sifat Hausdorff adalah, untuk sebarang pasangan dari $x \neq y$, harus terdapat persekitaran U dan V dari x dan y sedemikian hingga pasangan U dan V *disjoint*. Pilih persekitaran W untuk 0, sedemikian hingga $x - y \notin W$. Kemudian, pilih persekitaran lain W' untuk 0 sehingga $W' - W' \subset W$. Maka $x + w'$ disjoint dari $y + w'$, untuk jika z adalah point dari irisan keduanya. Dapat ditulis $z = x + w_1 = y + w_2$ dengan $w_i \in W'$. Kemudian, $x - y = w_2 - w_1 \in W' - W' \subset W$.

Setengah yang lain dari pembuktian adalah hanya memisahkan point tak nol dari 0 dengan memlih persekitaran dari 0 yang tidak mengandung point tak nol.

4. Suatu topologi ruang linier adalah ruang regular

Teorema D.5.1

Topologi ruang linier adalah regular. Karena itu topologi ruang linier adalah ruang Hausdorff jika dan hanya jika himpunan $\{0\}$ tertutup.

Bukti :

U adalah persekitaran terbuka dari 0. Dari teorema di atas terdapat persekitaran V dari 0 sedemikian hingga $V + V \subset U$. Closure $\overline{V}$ adalah persekitaran tertutup dari 0, dan ditunjukkan bahwa $\overline{V} \subset U$.

Jika $x \in \overline{V}$ kemudian $x - V$ adalah persekitaran dari *x*, dan juga $[x - V] \cap V \neq \phi$. Ambillah *y* dalam $[x - V] \cap V$ dan tulis $y = x - z, z \in V$. Kemudian $x = y + z \in V + V \subset U$. Ini membuktikan bahwa U mengandung $\overline{V}$. Karena translasi ini adalah homeomorphisma, setiap persekitaran terbuka dari titik *x* harus mengandung persekitaran tertutup dari *x*; yaitu bahwa topologi ruang linier adalah regular. Konsekuensinya, topologi ruang linier adalah ruang Hausdorff jika dan hanya jika titik singleton tertutup. Tetapi akan lebih tepat jika dan hanya jika himpunan {0} tertutup.

5. Suatu topologi ruang linier adalah ruang T_3.

Teorema D.6.1.

Setiap topologi ruang linear adalah ruang topologi regular. Kondisi berikut pada Topologi Ruang Linier X adalah equivalen.
(a) X adalah ruang T3.
(b) {0} adalah himpunan tertutup.
(c) untuk masing-masing x≠ 0, terdapat persekitaran U dari 0 dengan $x \notin U$.

Bukti :

Regularitas mengikuti teorema tentang regularitas. Jika X adalah ruang T_3., semua singleton adalah tertutup, dan (b) mengakibatkan (a) karena ruang T_1. reguler adalah T_3. (Semua singleton adalah tertutup oleh prinsip lokalisasi), kondisi (b) equivalent dengan $\overline{\{0\}} = \{0\}$, sedangkan (c) equivalen terhadap $\cap\{U : U \in N\} = \{0\}$.

Definisi D.6.2.

Topologi ruang linier disebut terpisah jika tiga kondisi equivalen pada teorema D.6.1. berlaku. Bisa dikatakan juga bahwa topologi adalah terpisah. Sehingga topologi ruang linier terpisah adalah ruang Hausdorff.

6. Suatu topologi ruang linier adalah ruang regular lengkap (*completely regular*).

   Akibat D.7.1.

   Setiap topologi ruang linier adalah completely regular.

7. Suatu topologi ruang linier adalah generalisasi topologi grup.

   Preposisi D.8.1

   Setiap topologi ruang adalah generalisasi topologi grup.

   Bukti :

   X merupakan topologi ruang linier. Menurut kontinuitas dari perkalian skalar μ dengan invers $i : X \to X$ didefinisikan oleh $i(x) = -x = (-1)x = \mu(-1, x)$ untuk setiap $x \in X$ yang juga kontinu. Karena itu, X adalah generalisasi topologi grup.

Penutup

Setelah menggunakan studi literature dapat disimpulkan bahwa :

1. Koleksi persekitaran $N(x)$ dalam topologi ruang linier adalah aditif, berakibat f kontinu pada 0 $[= (0,0)]$.
2. Setiap persekitaran U dari 0 dalam topologi ruang linier adalah *absorbsing*.
3. Setiap persekitaran U dari 0 dalam topologi ruang linier termasuk suatu persekitaran balanced dan *balanced* tertutup dari 0.
4. Suatu topologi ruang linier adalah ruang hausdorff jika dan hanya jika himpunan $\{0\}$ tertutup.
5. Suatu topologi ruang linier adalah ruang regular.
6. Suatu topologi ruang linier adalah ruang T_3.
7. Suatu topologi ruang linier adalah ruang regular lengkap (*completely regular*).

8. Suatu topologi ruang linier adalah generalisasi topologi grup.

Topologi ruang linier masih bisa dikembangkan pada ruang lain, misal, ruang metrik sehingga membentuk topologi ruang linier bernorma, yang bersama ruang Hausdorff dapat membentuk ruang Hilbert. Menggunakan teori dasar himpunan yang dikembangkan dalam analisis real dan aljabar, dapat menemukan modifikasi topologi ruang linier.

Daftar Pustaka

Cheney, W. 2001. *Analysis for Applied Mathematics*. New York: Springer.

Gupta, S.L., Rani, N. 2000. *Fundamental Real Analysis. Forth Revision and Enlarged Edition*. New Delhi : Vikas Publishing House PVT LTP.

Hutahean, E. 1979. *Fungsi Riil*. Bandung: Penerbit ITB.

Hu, S. 1967. *Element of Real Analysis*. California: Holden-Day, Inc.

Kifli, B.,Usman, M. 1985. *Prinsip-Prinsip Matematika*. Bandung: Penerbit Sinar Baru

Lipschutz, S. 1981. *Theory and Problems of General Topology*. International Edition Schaum's Outline Series. Singapore: McGraw-Hill Book Company.

Milewski, E. G. 1994. *The Topology Problem Solver*. New Jersey : Research and Education Assosiation.

Kurniasih, N. Topologi Ruang Linear. Jurnal LIMIT Nomor 11\ Oktober 2010. Purworejo: Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Purcell, E. J., Varberg, D. Diterjemahkan oleh : Susila, I N., Kartasasmita, B., Rawuh. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitik. Jilid 1. Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Rudin, W. 1976. *Principles of Mathematical Analysis*. USA: McGraw-Hill, Inc.

Silaban, P., Anton, H. 1985. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Taylor, A. E., Lay, D. C. 1980. *Introduction to Functional Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Wahyudin. 1987. *Dasar-Dasar Topologi*. Bandung: Tarsito.

Wilansky, A. 1978. *Modern Methods in Topological Vector Spaces*. USA: McGraw-Hill, Inc.