HITUNG DIFFERENSIAL DALAM ELASTISITAS FUNGSI PERMINTAAN VARIABEL EKONOMI

Ambar Retno
Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Hitung differensial merupakan salah satu analisis yang dapat digunakan dalam analisis variabel ekonomi karena pada hitung differensial dicari laju perubahan suatu fungsi akibat dari perubahan variabel bebas fungsi tersebut. Analisis Elastisitas dalam teori ekonomi sangat berkaitan dengan permasalahan perubahan relatif suatu variabel tak bebas y terhadap perubahan relatif variabel bebas x. Keadaan seperti ini dalam matematika dinyatakan sebagai fungsi derivatif/turunan ${}^{dy}\!/_{dx}$ *yang secara umum dinyatakan sebagai* $E = \frac{dy}{dx}.\frac{x}{y}$. *Fungsi permintaan sangat berkaitan dengan variabel harga P dan variabel jumlah barang Q sehingga elastisitas fungsi permintaan merupakan suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga P. elastisitas fungsi permintaan untuk beberapa barang (misal dua) meliputi dua macam yaitu elastisitas harga permintaan berkaitan langsung dengan hitung differensial. Dengan mengetahui elastisitas fungsi permintaan akan dapat diketahui apakah barang tersebut barang yang penting atau tidak.*

Kata Kunci: *differensial, elastisitas*

PENDAHULUAN

Matematika sebagai ilmu dasar selalu berusaha untuk memenuhi segala kebutuhan ilmu lain yang memerlukan analisis perhitungan tertentu. Salah satu bagian matematika yang sangat bermanfaat untuk melakukan suatu analisis adalah Kalkulus.

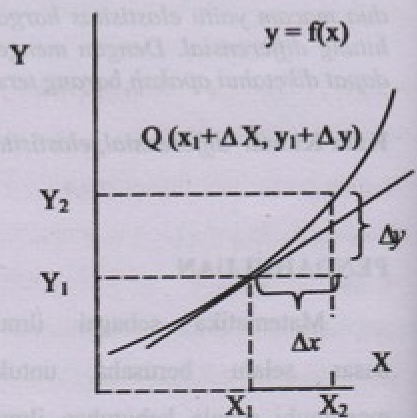
Kalkulus adalah suatu analisis matematika mengenai perubahan. Perubahan itu dapat berupa perubahan nyata dalam alam ataupun perubahan yang

hanya dipikirkan untuk keperluan perhitungan.(Yohanes & Budiyono, 1980). Kalkulus dalam matematika meliputi dua hal yaitu hitung differensial dan hitung integral. Pada hitng differensial dicari laju perubahan suatu fungsi dan sebaliknya pada hitung integral dicari fungsi yang lajunya perubahan fungsinya diketahui.

Dalam analisis ekonomi selain untuk menghitung laju perubahan hitung differensial juga digunakan untuk menghitung maksimum dan minimum dari fungsi seperti peritungan meminimalkan ongkos dan memaksimalkan laba suatu fungsi produksi. Hitung differensial yang berkaitan langsung dengan laju perubahan seuat fungsi adalah analisis elastisitas fungsi *variabel* ekonomi. Dalam penulisan kali ini akan dibahas mengebnai cara pemakaian hitung differensial dalam analisis elastisitas fungsi permintaan.

PENGERTIAN TENTANG DIFFERENSIAL, DIFFERENSIABEL DAN KUOSIEN DIFFERENSIABEL SUATU FUNGSI

Jika dipunyai fungsi y = f(x) maka telah diketahui bahwa nilai dari variabel y dipengaruhi oleh nilai x. sehingga perubahan nilai x akan menimbulkan adanya perubahan nilai y dari nilai y yang semula. Hal ini karena perubahan nilai x menimbulkan perubahan nilai y. Perhatikan gambar.



Dalam gambar tersebut terlihat grafik y = f(x). Pada grafik tersebut terdapat titik P (x_1 , y_1) dimana y_1 = f(x_1). Apabila titik P bergeser ke titik Q dengan menambah x_1 sebesar Δx maka akan menimbulkan perubahan y_1 sebesar $y_1 + \Delta y$ sehingga diperoleh koordinat titik Q($x_1+\Delta x$, $y_1+\Delta y$). Dapatlah dikatakan bahwa Δy adalah perbedaan dua titik P da Q dalam absis. Angka pembagian selisih atau perbandingan antara perubahan nilai y dengan perubahan nilai x disebut Kuosien Differensial *(Differential Quotient).*

Sehingga rumus kuesien differensial dinyatakan sebagai

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(y_1+\Delta y)-y_1}{(x_1+\Delta x)-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{(x_1+\Delta x)-x_1}$$

Limit dari kuesien differensial disebut derivatif fungsi. Jadi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ adalah derivatif dan dnyatakan sebagai $\frac{dy}{dx}$. Dari grafik di atas terlihat bahwa $\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\beta$ dan $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha$ adalah kemiringan (*gradient*) grafik y = f(x) di titik (x1 , y1).

Proses untuk memperoleh derivatif disebut differensial dari fungsi f(x). tanda atau notasi differensial adalah f(x) = $\frac{dy}{dx}$.

Perlu diperhatikan bahwa syarat suatu fungsi mempunyai derivatif atau dapat didefferensialkan (differensiabel) adalah bahwa fungsi tersebut harus kontinyu.

HAKEKAT DERIVATIF DAN DIFFERENSIAL

Dari uraian sebelumnya bisa diketahi kesamaan dan perbedaan kuosien differensi dan derivatif dari sebuah fungsi. Kuosien differensi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tak lain adalah lereng dari kurva y = f(x) sedangkan derivatif $\frac{dy}{dx}$ adalah lim $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ untuk $\Delta x \to 0$.

Jika Δx sangat kecil maka

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ sendiri, dengan kata lain derivatif fungsi yang bersangkutan sama dengan kuesien differensinya $\left(\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Jadi untuk Δx yang sangat kecil, derivatif nya juga mencerminkan lereng dari kurva y = f(x).

Notasi $\dfrac{dy}{dx}$ sesungguhnya terdiri dari dua suku yaitu dy dan dx. Suku dy dinamakan differensial dari y, sedangkan dx merupakan differensial dari x. differensial dari x (dx) mencerminkan perubahan sangat kecil pada variabel bebas x.

Differensial dari x :

$$dx = \Delta x$$

Adapun differensial dari y (dy) mencerminkan taksiran perubahan sangat kecil pada variabel bebas x. dari sini kita bisa melihat bahwa differensial dari variabel terikat sebuah fungsi sekaligus merupakan differensial dari fungsi yang bersangkutan, yakni hasil kali derivatifnya terhadap peubahan pada variabel bebas.

Differensial dari y :

$$dy = \frac{dy}{dx} \Delta x$$

Dari penjelasan dy dan dx diatas, maka derivatif $\dfrac{dy}{dx}$ tak lain adalah lereng taksiran (*approximated slope*) dari kurva y = f(x) pada kedudukan x tertentu. Lereng yang sesungguhnya (*the true slope*) adalah kuesien differensi $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Karena $\dfrac{dy}{dx}$ merupakan lereng taksiran maka hasilnya dapat lebih besar (*over estimated*) dari, atau lebih kecil (*under estimated*) atau sama dengn lereng yang sesungguhnya. Hal ini tegantung pada jenis fungsinya. Untuk fungsi linear, lereng taksiran senantiasa sama dengan lereng sesungguhnya berapapun Δx semakin. Jadi $\left(\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Untuk fungsi non linear, semakin besar Δx semakin besar pula perbedaan antara lereng

taksiran (derivatif $\frac{dy}{dx}$) dengan lereng sesungguhnya (kuesien differensi) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Sebaliknya semakin kecil Δx semakin kecil pula perbedaan antara lereng taksiran dan lereng sesungguhnya. Dan jika Δx sangat kecil ($\Delta x \to 0$), maka lereng taksiran akan sama dengan lereng sesungguhnya.

Dari uraian di atas, maka penggunaan differensial sebagai penaksir perubahan suatu fungsi berkenaan dengan perubahan kecil dalam peubah bebas fungsi yang bersangkutan cukup dapat dipertanggungjawabkan. Inilah yang mendasari mengapa Kalkulus banyak digunakan dalam analisis bisnis dan ekonomi.

ANALISIS ELASTISITAS VARIABEL EKONOMI

Dalam teori ekonomi mikro, elastistisitas E suatu fungsi y- f(x) didefinisikan sebagai hasil bagi fungsi turunan atau marjinal y' dengan fungsi rata-rata $\bar{y}$ dan dituliskan sebagai :

$$E = \frac{y'}{\bar{y}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x}{y / x} = \frac{dy / dx}{y / x} = \frac{dy}{dx} . \frac{x}{y}$$

Dengan pengertian yang sama elastisitas juga dapat dituliskan sebagai :

$$E = \frac{dy / y}{dx / x} = \frac{perubahan\ nisbi\ y}{perubahan\ nisbi\ x} = \frac{\%\ kenaikan\ y}{\%\ kenaikan\ x}$$

Ini berarti bahawa elastisitas y-f(x) merupaakn limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol. Dengan terminologi lain, elatisitas y terhadap x dapat juga dikatakan sebagai rasio prosentase perubahan y terhadap prosentase perubahan x.

Arti ini juga sangat penting bagi ekonomi karena membandingkan pengaruh perubahan nisbi suatu besaran terhadap perubahan nisbi suatu besaran lainnya, misalnya perubahan produksi dan lain-lain.

Dalam menentukan apakah suatu fungsi elastik atau tidak maka dipakai nilai mutlak E. suatu fungsi dinamakan :

- elastik atau kenyal bila E > 1
- berelastisiats satu bila E = 1
- tak elastik atau tak kenyal bila E < 1

Dalam Ekonomi ada tiga fungsi yang sangat akrab dan sangat membutuhkan analisis elastisitas yaitu fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan fungsi produksi.

Dalam penulisan kali ini hanya akan dibicarakan elastisitas fungsi pemintaan dimana dalam analisis elastistas fungsi permintaan melibatkan variabel harga P dan variabel jumlah barang Q yang akan selalu berhubungan.

ANALISIS ELASTISTAS FUNGSI PERMINTAAN

Elastisitas permintaan (*Price Elasticity Demand*) didefinisikan sebagai suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Dari sini terlihat bahwa elastisitas permintaan merupakan rasio antara prosentase perubahan harga. Jika fungsi permintaan dinyatakan dengan $Q_d = f(p)$ maka elastisitas permintaannya menjadi :

$$\eta_d = \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left(\Delta Q_d / Q_d\right)}{\left(\Delta P / P\right)} = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

Terlihat bahwa $\frac{dQ_d}{dP}$ tak lain adalah Qd' atau f'(P). Barang yang permintaannya elastis mengisyaratkan bahwa jika barang tersebut berubah sebesar prosntase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan prosentase yang lebih besar dari pada prosentase perubahan harganya.

Contoh :

Dimisalkan fungsi permintaan untuk suatu komoditi adalah Q = 245-3.5 P dimana Q adalah jumlah barang yang diminta

berjumlah persatuan waktu tertentu dan P adalah tingkat harga barang per unit. Persoalannya adalah berapa besarnya elastisitas permintaan barang tersebut pada waktu harganya Rp 10,00 per unit?

Untuk menghitung besarnya elastisitas permintaan digunakan formula

$$\eta_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \qquad \text{sehingga}$$

apabila fungsi permintaannya Q = 245-3.5 P maka

$$\eta_d = \frac{-3.5P}{245 - 3.5P}$$

Pada waktu harga barangnya Rp 10,00 maka elastisitas permintaan unit barang tersebut adalah $\eta_d = \frac{-3.5(10)}{245 - (3.5)(10)}$

$$= \frac{-35}{245 - 35}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

Elastisitas di atas hanya berhubungan dengan sebuah barang. Apabila dua macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaannya maka permintaan akan masing-masing barang tersebut akan fungsional terhadap harga kedua macam barang tersebut. Dengan kata lain jika barang A dan barang B mempunyai hubungan penggunaan maka

$Q_{da} = f(P_a, P_b)$ dan $Q_{db} = f(P_a, P_b)$

Derivatif pertama dari Q_{da} dan Q_{db} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, dimana :

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_a.

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_b.

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_b.

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_b.

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut

maka dapatlah dihitung elastisitas permintaan parsialnya. Dalam hal ini ada dua macam elastisitas permintaan yaitu :

1. Elastisitas harga permintaan

Elastisitas harga permintaan yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan dengan perubahan harga barang itu sendiri.

$$\eta_{da} = \frac{\%\Delta Q_{da}}{\%\Delta P_a}$$

$$= \frac{EQ_{da}}{EP_a} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}}$$

η_{da} : elastisitas permintaan barang A berkenaan dengan perubahan harga barang A.

$$\eta_{db} = \frac{\%\Delta Q_{db}}{\%\Delta P_b}$$

$$= \frac{EQ_{db}}{EP_b} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

η_{db} : elastisitas permintaan barang B berkenaan dengan perubahan harga barang B.

2. Elastisitas silang permintaan

Elastisitas silang permintaan merupakan elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan dengan perubahan harga barang lain. Sebagai contoh permintaan akan daging (a) adalah fungsi selain dari harganya sendiri P_a, juga dari harga ikan (b) P_b yang dapat menggantinya.

$Q_{da} - f(P_a, P_b)$ atau $Q_{db} - f(P_a, P_b)$

Elastisitas silang permintaan akan barang b adalah % perubahan permintaan barang a (Q_a) akibat % perubahan harga barang b, P_b.

$$\eta_{ab} = \frac{\%\Delta Q_{da}}{\%\Delta P_b}$$

$$= \frac{EQ_{da}}{EP_b} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}}$$

Sedangkan elastisitas silang permintaan akan barang b adalah % perubahan permintaan barang b (Q_b) akibat % perubahan harga barang a, P_a.

$$\eta_{ba} = \frac{\%\Delta Q_b}{\%\Delta P_a}$$

$$= \frac{EQ_b}{EP_a} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}$$

Elastisitas permintaan silang dapat positif dan negatif. Jika η_{ab} dan η_{ba} keduanya negatif ($\eta_{ab} <$ 0 dan $\eta_{ba} <$ 0) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang a dan barang b adalah komplementer atau saling melengkapi sebab penurunan haraga salah satu barang akan diikuti oleh permintaan atas keduanya. Sedangkan jika η_{ab} dan η_{ba} keduanya positif ($\eta_{ab} >$ 0 dan $\eta_{ba} >$ 0) untuk untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang a dan barang b adalah kompetitif / substitusi atau saling menggantikan sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan penurunan permintaan atas barang lainnya. Dalam menafsirkan elastisitas haraga permintaan cukup dengan melihat bsarnya angka hasil perhitungan sedangkan tandanya tak perlu dihiraukan. Dengan mengetahui elastisitas fungsi permintaan akan diketahui apakah barang tersebut termasuk barang penting atau tidak.

Contoh

Gambaran konsep elastisitas ini memperhatikan fungsi permintaan akan barang Y sebagai berikut . $Q_y = f(P_w,P_x,P_y,P_z)$

Disini Q_y adalah kuantitas Y yang diminta; P_w,P_x,P_y,P_z adalah harga-harga dari barang-barang W,X,Y,Z. Anggaplah bahwa hanya *variabel – variabel* tersebut yang mempengaruhi Q_y dan parameter-parameter perrsamaan permintaan tersebut ditaksir sebagai berikut :

$Q_y = 5000\text{-}0{,}3\ P_w + 0{,}2\ P_x - 0{,}5\ P_y - 0{,}000001\ P_z$

Turunan parsial Q_y pada barang-barang lainnya ialah :

$$\frac{\partial Q_y}{\partial P_w} = -0{,}3$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} = 0{,}2$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial P_z} = 0{,}000001 = 0$$

karena P dan Q selalu positif, maka perbandingan P_w / Q_y , P_x / Q_y dan P_z / Q_y selalu positif. Oleh karena itu, tanda dari ketuga elastisitas silang pada contoh tersebut, ditentukan oleh turunan-turunan parsial.

$Ep_w = (-0{,}3)(P_w / Q_y) < 0$, maka barang W dan barang Y adalah komplementer (pelengkap).

$Ep_x = (0{,}2)(P_x / Q_y) > 0$, maka barang X dan barang Y adalah substitusi (pengganti).

$EP_z = (0{,}000001)(P_z / Q_z) \approx 0$, selama perbandingan Pz / Qy tidak terlampau besar, maka barang Z dan barang Y adalah *independent* (saling bebas)

KESIMPULAN

Elastisitas dalam teori ekonomi sangat berkaitan dengan permasalahan perubahan relatif suatu *variabel independent* (y) terhadap perubahan relatif *variabel independent* (x). keadaan seperti ini dalam matematika dapat dinyatakan sebagai fungsi derivatif / turunan dy/dx. Secara umum elastisitas dinyatakan sebagai

$$E = \frac{dy}{dx}.\frac{x}{y}$$

Untuk fungsi yang tergantung pada lebih dari satu *variabel independent* y = *f(x,y)* maka elastisitas dari *variabel independent* dinyatakan sebagai turunan parsial

E_x - $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ atau E_y - $\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}$

Rumusan tersebut dapat diterapkan dalam setiap analisis yang berkaitan dengan perubahan *variabel*, baik dalam analisis elastisitas fungsi permintaan, fungsi penawaran, fungsi produksi maupun fungsi-fungsi ekonomi lain yang berkaitan dengan perubahan suatu *variabel.*

DAFTAR PUSTAKA

Budiono, 1996, *pengantar Ekonomi Mikro*, BPFE Yogyakarta

Chiang, Alpha C, 1967, *Fundamental Method of Mathematical Economic*, Mc. Graw Hill, New York

Dunairy, 1999, *Matematika Terapan* Untuk Bisnis dan Ekonomi, edisi kedua BPFE Yogyakarta

H. Johanes dan Budiyono Sri Handoko, 1980, *Pengantar Matematika Untuk Ekonomi*, LP3ES Jakarta

Lincolin Arsyad, 1999, *Ekonomi Manajerial " Ekonomi Mikro Terapan Untuk Manajemen Bisnis*, BPFE Yogyakarta

Sofjan Assauri, 1996, *Matematika Ekonomi,* Rajawali Press Jakarta