MENENTUKAN AKAR-AKAR PERSAMAAN PANGKAT EMPAT

Supriyono
Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Tulisan ini terdiri 3 bagian yaitu (1) bagian pendahuluan yang membahas bentuk umum persamaan pangkat empat dan usaha para ahli matematika untuk menemukan metode menentukan akar-akar persamaan polinom; (2) bagian pembahasan yaitu penurunan rumus-rumus untuk menentukan akar-akar persamaan pangkat empat; (3) bagian penutup yang berisi ringkasan rumus untuk menentukan akar-akar persamaan pangkat empat.

Kata Kunci: *polinom, akar, persamaan pangkat empat*

Pendahuluan

Bentuk umum persamaan polinom dalam berderajat n adalah: $a.x^n + a^1x^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}xa_n = 0$, $a \neq 0$ dengan a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots n$) adalah konstanta real. Jika variabel x derajat dengan suatu bilangan kompleks sedemikian hingga kali mat tersebut menjadi pernyataan yang bernilai benar, maka bilangan kompleks tersebut dinamakan akar-akar persamaan polinom.

Untuk polinom berderajat dua atau persamaan kuadrat yang ber-bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, akar-akarnya dapat dicari dengan meng-gunakan rumus ABC yaitu:

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Untuk polinom berderajat tiga atau persamaan kubik yang ber-bentuk $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$; $a \neq 0$ dengan a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) konstanta rasional, akar-akarnya dapat dicari dengan memisalkan:

$$b = \frac{a_2}{a_0};\ c = \frac{a_1}{a_0} \text{ dan } d = \frac{a_3}{a_0};$$

sehingga persamaan kubik dibentuk menjadi:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x_1 = z_1 - \frac{p}{3z_2} - \frac{b}{3}$$

$$x_2 = z_1w - \frac{pw^2}{3z_1} - \frac{b}{3}$$

$$x_3 = z_1w^2 - \frac{pw}{3z_1} - \frac{b}{3}$$

dengan $w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

z_1 adalah salah satu akar persamaan:

$$z^3 = -\frac{2}{2} + \sqrt{R} \text{ atau}$$

$$z^3 = -\frac{2}{2} - \sqrt{R}$$

$$R = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4};$$

$$p = c - \frac{b^2}{3}$$

$$q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$$

Pembahasan

Perhatikan bentuk umum persamaan pangkat empat berikut:

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a^3x + a^2 = 0$;

$a_0 \neq 0$ .... (1)

dengan a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) konstanta real.

Jika diambil $b_1 = \frac{a_1}{a_0}$; $b_2 = \frac{a_2}{a_0}$; $b_3 = \frac{a_3}{a_0}$; $b_4 = \frac{a_4}{a_0}$, maka persamaan (1) dapat dibentuk menjadi:

$x^4 + b_1.x^3 + b_2.x^2 + b_3.x + b_4 = 0$; (2)

dengan b_1, b_2, b_3, dan b_4 konstanta real.

Misalkan $x = y + k$, k konstan, persamaan (2) dapat ditulis:

$(y + k)^4 + b_1 (y + k)^3 + b_2 (y + k) + b_3 (y + k) + b_4 = 0$ atau

$y^4 + (4k + b)y^3 + (6k^2 + 3b_1k + b_2)y^2 + (4k_3 + 3bk^2 + 2b_2k + b_3)y + (k_4+b_1k_3+b_2k^2 + b_3k + b_4) = 0.$

Jika diambil $k = -1/4b_1$ maka diperoleh: $y_4 + \left(b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right)y^2 + \left(\frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1b_2 + b_3\right)y + b_4 + \frac{1}{16}b_1^2.b_2 - 1/4\ b1b3 - \frac{3}{256}b_1^4 = 0$

atau dapat ditulis dalam bentuk:

$y^4 + c_1y^2 + c_2y + c_3 = 0$......... (3)

dengan:

$$c_1 = b_2 - \frac{3}{8}b_1^2$$

$c_2 = \frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1 b_2 + b_3$;

$c_3 = b_4 + \frac{1}{16}b_1^2.b_2 - \frac{1}{4}b_1 b_3 - \frac{3}{256}b_1^4$

Persamaan (3) merupakan persamaan pangkat empat yang direduksi. Jadi persamaan pangkat empat dalam bentuk (1) dapat direduksi menjadi bentuk (3) dengan mengambil

$x = y - \frac{1}{4}b_1$ ……..……….. (4)

selanjutnya persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk:

$y^4 + c_1 y^2 = c_2 y - c_3$ ……… (5)

Jika kedua ruas persamaan (5) ditambah $z^2 + 2y^2 z + 2c_1 z + 2c_1 y^2 + c_1^2$ maka diperoleh:

$(y^3 + c_1 + z)^2 = (c_1 + 2z)y^2 - c_2 y$

$+ (c_1^2 - c_3 + 2c_1.z + z^2)$ …………(6)

Bentuk persamaan (6) pilih z sedemikian hingga ruas kanan berbentuk kuadrat sempurna. Hal ini dapat dipenuhi jika:

$c_2^2 - 4(c_1 + 2z)(c_1 - c_3 + 2c_1^2 z + z) = 0$

atau

$z^3 + \frac{5}{2}c_1 z^2 + (2c_1^2 - c_3)z + \left(\frac{1}{2}c_1^3 - \frac{1}{8}c_2^2\right) = 0$ atau dapat ditulis

$z_3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_3 = 0$ ……… (7)

dengan

$d_1 = \frac{5}{2}c_1$; $d_2 = 2c_1^2 - c_3$;

$d_3 = \frac{1}{2}c_1^3 - \frac{1}{2}c_1 c_3 - \frac{1}{8}c_2^2$;

Persamaan (7) dapat diselesaikan dengan reduksi.

Misal $z = w - \frac{1}{3}d_1.\frac{1}{3}$ ……… (8)

diperoleh:

$w^3 + \left(d_2 - \frac{1}{3}d_1^2\right)w +$

$\left(d_3 - \frac{1}{3}d_1 d_2 + \frac{2}{27}d_1^3\right) = 0$

ditulis $w^3 + e_1.w + e_2 = 0$ …… (9)

dengan:

$e_1 = d_2 - \frac{1}{3}d_1^2$;

$e_2 = d_3 - \frac{1}{3}d_1 d_2 + \frac{2}{27}d_1^3$

Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan (9),

misalkan $w = r = k$ ………… (10)

$(r + k)^3 + e_1(r + k) + e_2 = 0$, atau

$r_3 + k_3 + e_2 + (3rk + e_1)(r+k) = 0$, Ambil $r^3 + k^3 + e_2 = 0$ dan

$(3rk + e_1)(r + k), r + k \neq 0$

Diperoleh $3rk + e_1 = 0$ atau

$$rk = -\frac{1}{3}e_1$$

$$(rk)^3 = \left(-\frac{1}{3}e_1\right)^3 \quad \text{.............} \quad (11)$$

Dari $r^3 + k^3 + e_2 = 0$ diperoleh :

$$r^3 = -k^3 - e_2 \quad \text{.....................} \quad (12)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (12) ke persamaan (11), diperoleh:

$$(-k_3 - e_2)k^3 = -\frac{1}{27}e_1^3 \text{ atau}$$

$$(k^3)^2 + e_2k^3 - \frac{1}{27}e_1^3 = 0 \quad \text{......} \quad (13)$$

Persamaan (13) merupakan persamaan kuadrat dalam k^2, sehingga dapat diselesaikan dengan rumus kuadrat:

$$k^3 = -\frac{1}{2}e_2 + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2} \quad \text{atau}$$

$$k^3 = -\frac{1}{2}e_2 - \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2} \quad .$$

Dengan mensubstitusikan salah satu nilai k ke persamaan (12), diperoleh nilai r. Selanjutnya nilai k dan r disubstitusi ke persamaan (10), diperoleh nilai w = k + r. Nilai w disubstitusi ke persamaan (8), sehingga diperoleh:

$$z = k + r - \frac{1}{3}d_1 \quad \text{..............} \quad (14)$$

Selanjutnya substitusi nilai z dari persamaan (14) ke persamaan (6)

$$\left(y^2 + c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1\right)^2 =$$

$$(c_1 + 2k + 2k - \frac{2}{3}d_1).y^2 - c_2y + \left\{\left[c_1 + \left(k + r - \frac{1}{3}\right)\right]^2 - c_3\right\} \text{ atau dapat}$$

ditulis:

$$(y^2 + n)^2 = j.y^2 - c_2y + n^2 - c_3 \quad (15)$$

dengan $n = c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1$ dan

$j = c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1$ maka dapat diuraikan menjadi:

$$(y^2 + n)^2 = j.(y - m)^2 \quad \text{.........} \quad (16)$$

dengan $m = \frac{c_2}{2j}$.

Persamaan (6) dapat diselesaikan sebagai berikut:

$(y^2 + n) = (y - m)\sqrt{j}$ atau

$(y^2 + n) = -(y - m)\sqrt{j}$

Sehingga diperoleh:

$y^2 - y\sqrt{j} + n + m\sqrt{j} = 0$ atau

$y^2 + y\sqrt{j} + n + m\sqrt{j} = 0$

Dengan menggunakan rumus kuadrat diperoleh:

$$y_1 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n+m\sqrt{j}\right)}}{2};$$

$$y_3 = \frac{-\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n-m\sqrt{j}\right)}}{2};$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n+m\sqrt{j}\right)}}{2};$$

$$y_4 = \frac{-\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n-m\sqrt{j}\right)}}{2}$$

Nilai-nilai y_1, y_2, y_3, dan y_4 disubstitusikan ke persamaan (4) sehingga diperoleh:

$$y_1 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n+m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}b_1$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n+m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}b_1$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n+m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}b_1$$

$$y_4 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j-4\left(n+m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}b_1$$

dengan:

$$n = c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1;$$

$$j = c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1$$

$$m = \frac{c_2}{2j}$$

Jadi x_1, x_2, x_3, dan x_4 akar-akar persamaan pangkat empat.

Contoh penggunaan rumus:

1. Tentukan akar-akar persamaan pangkat empat:
   $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x + 8 = 0$
   Penyelesaian:
   Dari persamaan pangkat empat di atas diketahui:
   $b_1 = 4$; $b_2 = -3$; $b_3 = -10$; dan $b_4 = 8$ sehingga diperoleh:

$$c_1 = b_2 - \frac{3}{8}b_1^2$$
$$= -3 - \frac{3}{8}(6)$$
$$= -3 - 6 = -9;$$

$$c_2 = \frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1b_2 + b_3$$
$$= \frac{1}{8}(64) - \frac{1}{2}(4)(-3) - 10$$
$$= -4;$$

$$c_3 = b_4 + \frac{1}{16}b_1^2b_2 - \frac{1}{4}b_1b_3 - \frac{3}{256}b_1^4$$
$$= 8 - 3 + 10 = 12;$$

$$d_1 = \frac{5}{2}c_1 = \frac{5}{2}(-9)$$

$$= \frac{-45}{2};$$

$$d_2 = 2c_1^2 - c_3 = 2(-9)^2 - 12$$

$$= 150;$$

$$d_3 = \frac{1}{2}c_1^3 c_1 - \frac{1}{2}c_1c_3 - \frac{1}{8}c_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(-9)(12) - \frac{1}{8}(16)$$

$$= \frac{-625}{2};$$

$$e_1 = d_2 - \frac{d_1^2}{3} = 150 - \frac{\left(\frac{-45}{2}\right)^2}{3}$$

$$= \frac{-75}{4}$$

$$e_2 = d_3 - \frac{d_1 d_2}{3} + \frac{2d_1^3}{27} = \frac{-625}{2} - \frac{\left(\frac{-45}{2}\right)^2(150)}{3} - \frac{2\left(\frac{-45}{2}\right)^3}{27}$$

$$= \frac{-125}{4}$$

$$k^3 = -\frac{1}{2}e_2 + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}$$

$$= \frac{125}{8} + \sqrt{\frac{\left(\frac{-75}{4}\right)^3}{27} + \frac{\left(\frac{-125}{4}\right)^2}{4}}$$

$$= \frac{125}{8};$$

$$k = \frac{5}{2};$$

$$r = \frac{5}{2};$$

$$n = c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1$$

$$= -9 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{15}{2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$j = c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1$$

$$= c_1 + 2z$$

$$= -9 + 5 + 15 = 16;$$

$$m = \frac{c_2}{2j} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8};$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{16}}{2} + \frac{\sqrt{16 - 4\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{16}\right)}}{2} - \frac{1}{4}(4) = 1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{16}}{2} - \frac{\sqrt{16 - 4\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{16}\right)}}{2} - \frac{1}{4}(4) = 1$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{16}}{2} + \frac{\sqrt{16 - 4\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{16}\right)}}{2} - \frac{1}{4}(4) = -2$$

$$x_4 = -\frac{\sqrt{16}}{2} - \frac{\sqrt{16-4\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{8}\sqrt{16}\right)}}{2}$$

$$-\frac{1}{4}(4) = -4$$

Jadi akar-akar persamaan $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 10x + 8 = 0$, adalah: – 4, – 2, 1, 1.

2. Tentukan akar-akar persamaan pangkat empat

$$4x^4 - 8\sqrt{2}x^3 + 20x^2 - 12\sqrt{2}x + 9 = 0$$

Penyelesaian:

Dari persamaan pangkat empat di atas diketahui:

$b_1 = -2\sqrt{2}$; $b_2 = 5$; $b_3 = -3$;

$b_4 = \frac{9}{4}$; sehingga:

$$c_1 = b_2 - \frac{2}{31}b_1^2$$

$$= 5 - \frac{3}{8}(-2\sqrt{2})^2 = 5 - 3 = 2;$$

$$c_2 = \frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1b_2 + b_3$$

$$= -2\sqrt{2}\frac{1}{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0;$$

$$c_3 = b_4 + \frac{1}{16}b_1^2b_3 - \frac{1}{4}b_1b_3$$

$$-\frac{3}{256}b_1^4$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{5}{2} - 3 - \frac{3}{4} = 1;$$

$$d_1 = \frac{5}{2}c_1 = \frac{5}{2}(2) = 5;$$

$$d_2 = 2c_1^2 - c_3 = 2(2)^2 - 1 = 7;$$

$$d_3 = \frac{1}{2}c_1^3c_1 - \frac{1}{2}c_1c_3 - \frac{1}{8}c_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(2)^3 - \frac{3}{2}(2)(1) - \frac{1}{8}\ (0 =$$

3;

$$e_1 = d_2 - \frac{d_1^2}{3} = 17 - \frac{(5)^2}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$e_2 = d_3 - \frac{d_1d_2}{3} + \frac{2d_1^3}{27}$$

$$= 3 - \frac{(3)(7)}{3} - \frac{2(5)^2}{27} = \frac{15}{27}$$

$$k^3 = -\frac{1}{2}e_2 + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}$$

$$k^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{16}{27}\right) + \sqrt{\frac{1}{27}\left(\frac{-4}{3}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{16}{27}\right)^2}$$

$$= \frac{-8}{27};$$

$$k = -\frac{2}{3};\ r = -\frac{2}{3};$$

$$n = c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1$$

$$= 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = 1;$$

$$j = c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1 = c_1 + 2z$$

$$= 2 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{10}{3} = -4$$

$$m = \frac{c_2}{2j} = \frac{0}{8/3} = 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{-4}}{2} + \frac{\sqrt{-4-4\left(-1+0\sqrt{-4}\right)}}{2}$$

$$-\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{-4}}{2} + \frac{\sqrt{-4-4\left(-1+0\sqrt{-4}\right)}}{2}$$

$$-\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i$$

$$x_3 = \frac{-\sqrt{-4}}{2} + \frac{\sqrt{-4-4\left(-1+0\sqrt{-4}\right)}}{2}$$

$$-\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i$$

$$x_4 = \frac{-\sqrt{-4}}{2} + \frac{\sqrt{-4-4\left(-1+0\sqrt{-4}\right)}}{2}$$

$$-\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i$$

Jadi akar-akar persamaan

$$x^4 + 2\sqrt{2}x^3 + 5x^2 - 3\sqrt{2}x - \frac{3}{2}8 = 0,$$

adalah:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + i; \qquad \frac{1}{2}\sqrt{2}+i;$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} - i; \qquad \frac{1}{2}\sqrt{2} - 3\ ;$$

3. Tentukan akar-akar persamaan pangkat empat: $16x^4 + 32\sqrt{3}x^3 + 104x^2 - 8\sqrt{3}x - 15 = 0$

Penyelesaian:

Dari persamaan pangkat empat di atas diketahui:

$$b_1 = 2\sqrt{3};\ b_2 = \frac{13}{2};\ b_3 = \frac{-1}{2}\sqrt{3};$$

$$b_4 = \frac{-15}{16} \quad \text{sehingga:}$$

$$c_1 = b_2 - \frac{3}{8}b_1^2$$

$$= \frac{13}{2} - \frac{3}{8}(2\sqrt{3})^2 = 2;$$

$$c_2 = \frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1b_2 + b_3$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\sqrt{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\right)^3\left(\frac{13}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= -4\sqrt{3};$$

$$c_3 = b_4 + \frac{1}{16}b_1^2b_3 - \frac{1}{4}b_1b_3$$

$$-\frac{3}{256}b_1^4$$

$$= \frac{-15}{16} + \frac{1}{16}(12)\left(\frac{13}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{256}(2\sqrt{3})^4 = 3$$

$$d_1 = \frac{5}{2}c_1 = \frac{5}{2}(2) = 5;$$

$$d_2 = 2c_1^2 - c_3 = 2(2)^2 - 3 = 5;$$

$$d_3 = \frac{1}{2}c_1^3 - \frac{1}{2}c_1c_3 - \frac{1}{8}c_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)(3)$$

$$- \frac{1}{8}(-4\sqrt{3})^2 = -5;$$

$$e_1 = d_2 - \frac{1}{3}d_1^2 = 5 - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{-10}{3}$$

$$e_2 = d_3 - \frac{1}{3}d_1d_2 \frac{2}{27}d_1^3$$

$$= 5 - \frac{(5)(5)}{3} - \frac{2(125)}{27}$$

$$= -\frac{110}{27}$$

$$k^3 = -\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}$$

$$= \frac{55}{27} + \sqrt{\frac{-1000}{729} + \frac{12100}{2916}}$$

$$= 3{,}703703704$$

$$k = 1{,}547196278;$$

$$r = 0{,}718144897;$$

$$n = c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1$$

$$= 2{,}59944101;$$

$$j = c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1$$

$$= 3{,}19888202;$$

$$m = \frac{c_2}{2j} = -1{,}08291009;$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$$

$$- \frac{1}{4}(b_1)$$

$$= 1{,}394270935 - 1{,}933015919\, i$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$$

$$- \frac{1}{4}(b_1)$$

$$= 1{,}394270935 - 1{,}933015919\, i$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$$

$$- \frac{1}{4}(b_1)$$

$$= -0{,}01725576$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$$

$$- \frac{1}{4}(b_1)$$

$$= -0{,}771294525$$

Jadi akar-akar persamaan

$$16x^4 + 32\sqrt{3}x^3 + 104x^2 - 8\sqrt{3}x - 15 = 0$$

adalah: 2,771294525 ;

1,394270935 + 1,933015919 *i* ;

– 0,01725576 ;

1,394270935 – 1,933015919 *i*

4. Tentukan akar-akar persama-an pangkat empat $16x^4 - 32\sqrt{3}x^3 + 8x^2 - 32x + 1 = 0$

Penyelesaian:

Dari persamaan pangkat empat di atas diketahui:

$b_1 = -2;\ b_2 = \frac{1}{2};\ b_3 = -4;\ b_4 = \frac{1}{16}$

sehingga:

$$c_1 = b_2 - \frac{3}{8}b_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}(2)^2$$

$$= -1;$$

$$c_2 = \frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{2}b_1^2 b_2 + b_3$$

$$= \frac{1}{8}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2\ {\frac{1}{2}}^{2} - 2$$

$$= -4$$

$$c_3 = b_4 + \frac{1}{16}b_1^2 b_3 - \frac{1}{4}b_1 b_3 - \frac{3}{256}b_1^4$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16}(4)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-2)(-2) - \frac{2}{256}(2)^4$$

$$= -1$$

$$d_1 = \frac{5}{2}c_1 = \frac{5}{2}(-2) = -\frac{5}{2};$$

$$d_2 = 2c_1^2 - c_3 = 2(-1)^2 - (-1)$$

$$= 3;$$

$$d_3 = \frac{1}{2}c_1^3 - \frac{1}{2}c_1 c_3 - \frac{1}{8}c_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)(-1) - \frac{1}{8}(16) = -3;$$

$$e_1 = d_2 - \frac{d_1^2}{3} = 3 - \frac{\frac{-5}{2}^{2}}{3}$$

$$= \frac{11}{12}$$

$$e_2 = d_3 - \frac{d_1 d_2}{3} + \frac{2d_1^3}{27}$$

$$= 3 - \frac{\frac{5}{2}(3)}{3} + \frac{2\ {\frac{5}{2}}^{3}}{27}$$

$$= -\frac{179}{108}$$

$$k^3 = -\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{1}{27}e_1^3 + \frac{1}{4}e_2^2}$$

$$= \frac{179}{216} + \sqrt{\frac{1331,1}{46656} + \frac{32041}{46656}}$$

$$= 1,674444639$$

$k = 1,187472601;$

$r = -0,43418669;$

$$n = c_1 + k + r - \frac{1}{3}d_1$$

$$= 0,586619244;$$

$j = c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3} d_1$

$= 2{,}173238489;$

$m = \frac{c_2}{2j} = -0{,}92028556;$

$x_1 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$

$- \frac{1}{4}(b_1) = 2{,}383024484$

$x_2 = \frac{\sqrt{j}}{2} - \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$

$- \frac{1}{4}(b_1) = 0{,}091166308$

$x_3 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$

$- \frac{1}{4}(b_1)$

$= -0{,}237909539$

$+ 1{,}183210091\, i$

$x_4 = \frac{\sqrt{j}}{2} - \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2}$

$- \frac{1}{4}(b_1)$

$= -0{,}237909539$

$+ 1{,}183210091\, i$

Jadi akar-akar persamaan $16x^4 - 32x^3 + 8x^2 - 32x + 1 = 0$ adalah: 2,383024484; – 0,237909539 + 1,183210091 *i* ; 0,091166308; – 0,237909539 – 1,183210091*i*

Penutup

Persamaan pangkat empat dengan bentuk umum

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0;$ a $\neq 0$, a_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ konstan-ta real, dapat ditulis dalam bentuk

$x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0;$ b_1, b_2, b_3, dan b_4 konstanta real deng-an

$b_1 = \frac{a_1}{a_0}$; $b_2 = \frac{a_2}{a_0}$; $b_3 = \frac{a_3}{a_0}$;

$b_4 = \frac{a_4}{a_0}$.

Persamaan tersebut mempunyai empat akar komplek, yang dapat ditentukan rumus sebagai berikut:

$x_1 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}(b_1)$

$x_2 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}(b_1)$

$x_3 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}(b_1)$

$x_4 = \frac{\sqrt{j}}{2} + \frac{\sqrt{j - 4\left(n + m\sqrt{j}\right)}}{2} - \frac{1}{4}(b_1)$

dengan:

$n = c_1 + k + r - \frac{1}{3} d_1 ;$

$$j = c_1 + 2k + 2r - \frac{2}{3}d_1;\ m = \frac{c_2}{2j}$$

Daftar Pustaka

Nielsen, Kaj. L; 1969 Algebra**:** *A Modern Approach With Review.Question & Answer* A Barnes & Nolle Outline.

Vance E.P. 1975. *Modern Algebra and Trigonometri. Inria Edition,* Addisonwesley Publishing Company. Inc.