SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE JACOBI

Prasetyo Budi Darmono
Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Persamaan linear dalam n variabel x_1, x_2, x_3, ... x_n sebagai sebuah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots a_n x_n = b$, dimana a_1, a_2, ... a_n dan b adalah konstanta-konstanta riel. Himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear di dalam variabel-variabel x_1, x_2, ... x_n dinamakan sebuah sistem persamaan linear. Urutan-urutan bilangan s_1, s_2, ...= s_n dinamakan solusi sistem persamaan jika adalah sebuah pemecahan dari tiap-tiap persamaan di dalam sistem tersebut.

Metode Jacobi merupakan salah satu metode / cara untuk menyelesaikan solusi sistem persamaan linear. Metode Jacobi adalah metode konvergen. Sehingga setiap persamaan harus diubah sedemikian hingga koefisien-koefisien nilai mutlaknya paling besar satu, yaitu $\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq 1$.

Kata Kunci: *persamaan linar, metode jacobi, konvergen*

Pendahuluan

Mencari solusi/pemecahan sistem persamaan linear adalah tugas yang terutama dari Analisis Numerik. Banyak sekali cara untuk mencari cara untuk mencari Solusi Sistem Persamaan Linear. Pada tingkat Sekolah Menengah Atas ada tiga cara mencari Solusi Sistem Persamaan Linear yaitu Metode Eliminasi, Metode Subtitusi, dan Metode Determinan. Ketiga metode tersebut masih dirasa sulit untuk memecahkan sistem yang terdiri dari n Persamaan Linear (n > 3).

Dalam prakteknya, Sistem Persamaan Linear seringkali dipecahkan pada komputer digital. Karena Komputer dibatasi menurut ba-nyaknya bilangan desimal yang dapat diangkut oleh komputer tersebut, maka Komputer akan membulatkan atau akan memotong kebanyakan kuantitas numerik. Ka-rena hal tersebut maka metode Jacobi merupakan salah satu meto-de terbaik untuk memecahkan Sistem Persamaan Linear tersebut.

Menurut pengamatan penu-lis, Metode Jacobi merupakan salah satu metode yang baik dalam men-cari Solusi Sistem Persamaan Li-near. Metode Jacobi dapat memini-mumkan efek kesalahan pembu-latan.

Solusi Sistem Persamaan Linear

Sebuah garis di dalam bidang x_y secara aljabar dapat dinyatakan oleh sebuah persamaan yang berbentuk $a_1x + a_2y = b$. Sebuah persamaan semacam ini dinamakan persamaan linear dalam variabel x dan variabel y. Secara lebih umum, maka kita mendefinisikan sebuah persamaan linear dalam n variabel x_1, x_2, ….. x_n sebagai sebuah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ….. + a_n x_n = b$. dimana a dan b adalah konstanta-konstanta riil.

Sebuah pemecahan (*solu-tion*) persamaan lineara_1 $x_1 + a_2$ x_2 ….. a_n $x_n = b$ adalah sebuah urutan dari n bilangan s_1, s_2, s_3, ….. s_n, sehingga persamaan tersebut dipe-nuhi bila kita mensubstitusikan $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, … $x_n = s_n$. Himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan himpunan pemecahan (*it's solution set*).

Himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear dalam variabel-variabel x_1, x_2, x_3, ….. x_n dinamakan sebuah Sistem Persama-an Linear atau sebuah Sistem Linear. Urutan bilangan-bilangan s_1, s_2, ….. , s_n dinamakan sebuah Pemecahan Sistem tersebut jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ….. $x_n = s_n$ adalah pemecahan dari tiap-tiap persamaan di dalam sistem tersebut. Tidak semua Sistem Persamaan Linear mempunyai pemecahan. Sistem persamaan yang tidak mempunyai pemecahan dikatakan tak konsisten (*in consistant*). Jika ada setidak-tidaknya satu pemecahan, maka Sistem Persamaan tersebut dinamakan konsisten (*consistent*).

Sebuah sistem sebarang yang terdiri dari m persamaan linear dengan n bilangan yang tak diketahui akan ditulis sebagai:

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots.. + a_{1n} x_n = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots.. + a_{2n} x_n = b_2$

…

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots.. + a_{mn} x_n = b_m$

dimana $x_1, x_2, \ldots.. x_n$ adalah bilangan-bilangan yang tak diketahui dan a dan b yang berindeks bawah menyatakan konstanta-konstanta.

Solusi Sistem Persmaan Linear dengan Metode Jacobi

Di dalam aljabar linear telah dibicarakan beberapa metode (cara) menyelesaikan suatu Sistem Persamaan Linear dengan menggunakan metode langsung (*direct method*). Pada penulisan ini akan dibicarakan suatu metode untuk menyelesaikan suatu Sistem Persamaan Linear dengan cara tidak langsung yang disebut metode iteratif. Metode iteratif dimulai dengan aproksimasi terdekat dari barisan tersebut adalah siklus dari perhitungan-perhitungan yang diulang-ulang sampai ketelitian yang diinginkan diperoleh. Sedangkan dalam metode iterative banyaknya perhitungan tergantung pada ketelitian yang diinginkan, misalkan: diketahui sistem persamaan linear berikut:

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots.. + a_{1n} x_n = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots.. + a_{2n} x_n = b_2$

$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \ldots.. + a_{3n} x_n = b_3$

………………………………

$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots.. + a_{nn} x_n = b_n$

Dengan koefisien-koefisien diagonal a_{ii} tidak nol. Dari persamaan (4.1) didapat:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2 .... - \frac{a_{3n}}{a_{33}} x_n$$

....

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \frac{an_3}{a_{nn}} ... - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}} x_{(n-1)}$$

Pers. 4.2

Misalkan $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, … $x_n^{(1)}$ adalah aproksimasi-aproksimasi pertama untuk x_1, x_2, x_3, … x_n disubstitusikan ke dalam ruas kanan persamaan (4.2). Kemudian di per-oleh suatu sistem dengan aproksi-masi kedua.

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} - ... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(1)}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} - .... - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(1)}$$

....

$$x_n^{(2)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{ni}}{a_{nn}} x_1^{(1)} - ... - \frac{a_{n.(n-1)}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(1)}$$

Dengan cara yang sama, bila $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, …$x_n^{(n)}$ adalah suatu sistem dengan aproksimasi ke-n, maka aproksimasi berikutnya dibe-rikan oleh formula:

$$x_1^{(n+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(n)} - ... - \frac{a_{in}}{a_{ii}} x_n^{(n)}$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(n)} - .... - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(n)}$$

....

$$x_n^{(n+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(n)} - ... - \frac{a_{n.(n-1)}}{a_{nn}} x_{(n-1)}^{(n)}$$

Pers. 4.3

Metode tersebut disebut Me-tode Jacobi dan disebut juga metode pemindahan simultan. Metode Jacobi adalah metode konvergen, untuk sebarang pemilihan dari aproksimasi pertama $x_j^{(1)}$, (j= 1, 2, 3, …n) bila setiap persamaan dari sistem persamaan (4.2) memenuhi syarat bahwa jumlah dari nilai untuk koefisien-koefisien $\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ paling besar satu atau paling sedikit satu persamaan kurang dari satu unit yaitu:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq 1 \quad (i = 1,2,3,....n) \quad j \neq 1$$

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut:

Contoh:

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan Metode Jacobi

$$\left.\begin{array}{l} 10x_1-2x_2-x_3-x_4 \\ -2x_1+10x_2-x_3-x_4 \\ -x_1-x_2+10x_3-2x_4 \\ -x_1-x_2-2x_3+10x_4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =3 \\ =15 \\ =27 \\ =-9 \end{array} \quad \text{Pers. 4.4}$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan Metode Jacobi, sistem persamaan tersebut kita tulis kembali sebagai berikut:

$x_1 = 0,3 + 0,2\ x_2 + 0,1\ x_3 + 0,1\ x_4$

$x_2 = 1,5 + 0,2\ x_1 + 0,1\ x_3 + 0,1\ x_4$

$x_3 = 2,7 + 0,1\ x_1 + 0,1\ x_2 + 0,2\ x_4$

$x_4 = -0,9 + 0,1\ x_1 + 0,1\ x_2 + 0,2\ x_3$

Dari sistem terakhir dapat dilihat bahwa, tiap persamaan memenu-hi syarat

$$\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

Ambillah $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ nilai-nilai tersebut kita substitusikan ke persamaan 1 .

Diperoleh:

$x_1 = 0,3 + 0,2(0) + 0,1(0) + 0,1(0)$
$\quad = 0,3$

$x_2 = 1,5 + 0,2(0) + 0,1(0) + 0,1(0)$
$\quad = 1,5$

Dengan cara yang sama diperoleh $x_3 = 2,7$ dan $x_4 = -0,9$

Dengan mengambil aproksimasi-aproksimasi $x_1 = 0,3$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 2,7$ dan $x_4 = -0,9$ kita peroleh:

$x_1 = 0,3 + 0,2(1,5) + 0,1(2,7)$
$\quad + 0,1(-0,9) = 0,78$

Demikian pula diperoleh :

$x_2 = 1,74$; $x_3 = 2,7$; $x_4 = -0,18$

Apabila proses tersebut dilanjutkan terus akan kita peroleh hasil seperti pada tabel berikut:

n	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0,3	1,5	2,7	-0,9
2	0,78	1,74	2,7	-0,18
3	0,9	1,908	2,916	-0,108
4	0,9624	1,9608	2,9592	-0,036
5	0,845	1,9848	2,9851	-0,0158
6	0,9939	1,9938	2,9938	-0,006
7	0,9975	1,9975	2,9976	-0,0025
8	0,9990	1,9990	2,9990	-0,0010
9	0,996	1,9996	2,9996	-0,0004
10	0,998	1,9998	2,9998	-0,0002
11	0,999	1,9999	2,9999	-0,0001
12	1,0	2,0	3,0	0,0

Dengan Metode Jacobi dengan 12 iteratif diperoleh $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3 = 3$ dan $x_4 = 0$

Penutup

Metode Jacobi adalah metode konvergen, sehingga setiap persamaan yang diselesaikan dengan metode tersebut harus diubah sedemikian hingga koefisien-koefisien nilai mutlaknya paling besar satu, yaitu $\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq 1$, dimana a_{ij} dan a_{ii} masing-masing unsur dari matriks koefisien sistem persamaan tersebut.

Daftar Pustaka

Finizio/Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Erlangga

Scheid, Francis. 1992. *Analisis Numerik*. Jakarta: Erlangga

Wahyudin. 1986. *Metode Numerik*. Jakarta: Karunika