JEMBATAN KÖNIGSBERG

Puji Nugraheni

Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat dimodelkan dengan menggunakan diagram titik dan garis atau dalam matematika lebih dikenal dengan sebutan graf. Titik dalam graf dinamakan simpul dan garisnya dinamakan sisi. Penggunaan graf pertama kali adalah pada permasalahan Jembatan Königsberg pada tahun 1736. Permasalahan Jembatan Königsberg adalah apakah mungkin melewati ketujuh jembatan sebanyak satu kali untuk kembali ke tempat semula.

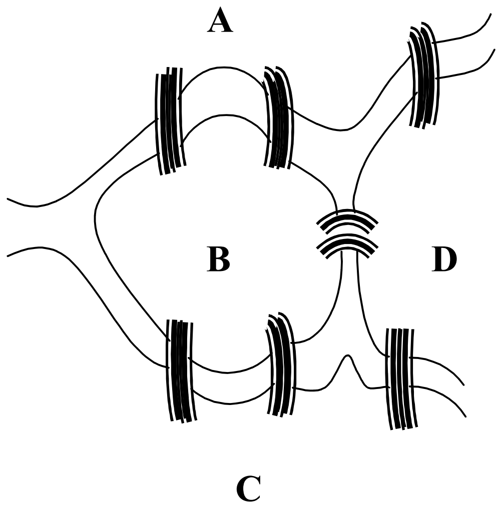
Permasalahan ini telah dipecahkan oleh ahli matematika dari Swiss bernama L. Euler pada tahun 1736. Dalam penemuannya Euler mengemukakan bahwa untuk dapat melewati semua jembatan sebanyak satu kali dan kembali ke tempat semula, maka grafnya harus merupakan graf Euler yaitu graf yang memuat sirkuit Euler. Sedangkan syarat keberadaan sirkuit Euler menurut Euler adalah derajat setiap simpulnya harus genap. Graf yang merepresentasikan permasalahan Jembatan Königsberg mempunyai simpul yang semuanya berderajat ganjil, sehingga tidak mungkin melewati semua jembatan sebanyak satu kali untuk kembali ke tempat semula

Kata Kunci: *jembatan Königsberg, graf Euler*

Pendahuluan

Dalam suatu model matematika, berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari biasanya diidentifikasi kemudian dinyatakan dalam suatu sistem yang bersifat matematis. Salah satu bentuk model matematika yang dapat dipergunakan untuk merepresentasikan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari adalah diagram titik dan garis. Pada dasarnya banyak sekali masalah nyata yang dapat diwakili dengan diagram titik dan garis, diantaranya penyampaian suatu berita atau gosip agar tersebar luas, pengantaran surat, penyusunan trayek pedagang keliling, peran-cangan jaringan kereta api, telekomunikasi, komputer, penyaluran bahan bakar, perancangan arena pameran atau tempat rekreasi agar pengunjung dapat melihat semua stan atau atraksi hi-buran tanpa melewati ulang jalur yang sama dan masih banyak lagi permasalahan yang lainnya. Pada contoh diatas ibu rumah tangga, rumah, kota, stasiun, sentral tele-pon, pusat informasi, komputer, POM bensin dan stand dapat digambarkan sebagai titik dan hubungan keakraban, jalan, prasa-rana hubungan, jalur komunikasi, kabel dapat diwakili oleh garis. Diagram titik dan garis seperti di atas dalam model matematika dike-nal sebagai graf. Menurut catatan sejarah, permasalahan pertama yang menggunakan graf adalah permasa-lahan Jembatan Königsberg pada tahun 1736.

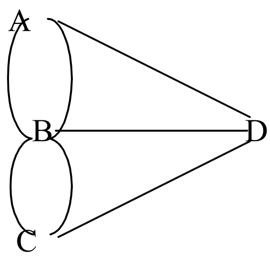
Jembatan Königsberg meru-pakan jembatan yang terletak di Kota Königsberg sekarang bernama Kota Kaliningrat (sebelah timur Prussia, Jerman sekarang), di kota tersebut terdapat Sungai Pregal yang mengalir mengitari Pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghu-bungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut seperti terlihat dalam gambar berikut:



Masalah Jembatan Königs-berg adalah apakah mungkin mela-lui ketujuh buah jembatan itu ma-sing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali ke tempat semu-la, tetapi mereka tidak dapat menje-laskan mengapa demikian jawaban-nya kecuali dengan cara coba-coba.

Tahun 1736, seorang Mate-matikawan Swiss, L. Euler adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah Jembatan Königsberg ini dengan menggu-nakan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke da-lam graf. Daratan yang dihubung-kan oleh jembatan dinyatakan seba-gai titik dan jembatan disimbolkan sebagai garis.

Representasi graf untuk Jembatan Königsberg adalah seba-gai berikut :



Jawaban yang dikemukakan oleh Euler adalah orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali ke tempat semula jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap. Yang dimaksud derajat adalah banyaknya garis yang ber-sisian dengan titik. Penemuan Euler tentang pemecahan permasalahan Jembatan Königsberg akan memun-culkan teori tentang graf Euler yang akan dibahas lebih lanjut dalam tulisan ini.

Terminologi Graf

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan berhingga dan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertex*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepa-sang simpul (Rinaldi Munir,2001). Secara geometri graf digambarkan sebagai kumpulan noktah (simpul) di dalam bidang yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi).

Dua buah simpul dikatakan *adjacent* bila keduanya terhubung langsung dan sebuah sisi dikatakan ber*incident* dengan kedua simpul yang dihubungkannya. Jika v_p *adjacent* dengan v_q maka sisi yang *incident* dengan kedua simpul tersebut dapat ditulis (v_p, v_q). Pada suatu graf juga dikenal derajat (de-gree) suatu simpul yaitu banyaknya sisi yang berincident dengan simpul tersebut.

Sisi pada graf dapat mem-punyai orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, Rinaldi Munir (2001) membedakan graf atas dua jenis, yaitu:

1. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

   Suatu graf dikatakan tak bera-rah jika sisinya tidak mempu-nyai orientasi arah.

   Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihu-bungkan oleh sisi tidak diper-hatikan atau

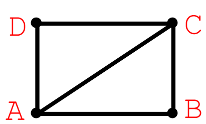
   $(v_p, v_q) = (v_q, v_p)$.

2. Graf Berarah (*Directed Graph* atau *Digraph*)

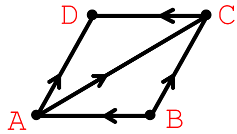
   Graf yang setiap sisinya dibe-rikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Pada graf berarah urutan pasangan sim-pul yang dihubungkan oleh sisi diperhatikan atau

   $(v_p, v_q) \neq (v_q, v_p)$.

Berikut merupakan contoh graf tak berarah dan graf berarah:



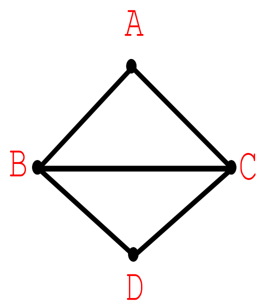
Gambar 2 (a) Graf tak berarah



Gambar 2 (b) Graf berarah

Pada suatu graf G juga di-kenal adanya lintasan dari simpul v_p ke v_q yaitu rangkaian simpul $v_p, v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{im}, v_q$ sehingga $(v_p, v_{i1}), (v_{i1} v_{i2}), \ldots, (v_{im}, v_q)$ adalah sisi pada graf G.

Contoh: Diketahui graf G pada gambar 3



Lintasan pada graf G diatas adalah lintasan A, B, C, D. Pada lintasan ini simpul A dinamakan simpul awal (*initial vertex*) dan D dinamakan simpul akhir (*terminal vertex*).

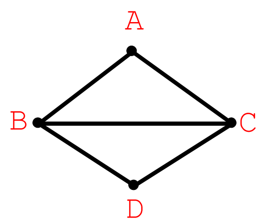
Suatu lintasan dikatakan lintasan sederhana (*simple path*) ji-ka tidak melalui sisi yang sama sebanyak dua kali dan suatu lin-tasan dikatakan lintasan elementer (*elementary path*) jika tidak melalui simpul yang sama sebanyak dua kali. Lintasan dengan simpul awal sama dengan simpul akhir disebut sirkuit. Berdasarkan lintasannya, maka sirkuit dibedakan menjadi dua yaitu sirkuit sederhana (*simple sircuit*) jika sirkuitnya tidak melalui sisi yang sama sebanyak dua kali dan sirkuit elementer (*elementary circuit*) jika sirkuitnya tidak mela-lui simpul yang sama sebanyak dua kali.

Contoh :

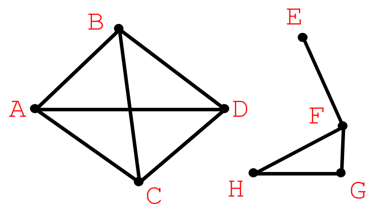
Pada gambar 3, A, B, C, A adalah sirkuit sederhana dan juga sirkuit elementer, sedangkan A, B, D, C, B, A bukan sirkuit sederhana dan juga bukan sirkuit elementer.

Dua simpul v_p dan simpul v_q disebut terhubung jika terdapat lintasan dari v_p ke v_q.Graf tak berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_p dan v_q dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_p ke v_q. Jika tidak demikian, maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Sedangkan untuk graf berarah dikatakan terhu-bung jika graf tak berarahnya terhubung.

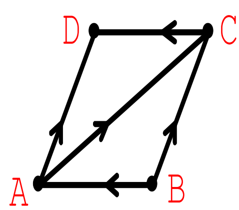
Contoh :



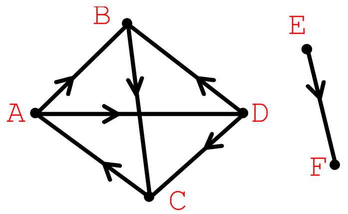
Gambar 4 (a) Graf tak berarah terhubung



Gambar 4 (b). Graf tak berarah tidak terhubung



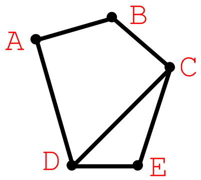
Gambar 5 (a)Graf berarah terhubung



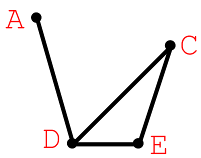
Gambar 5 (b)Graf berarah tidak terhubung

Anak graf (*subgraph*) dari graf G = (V,E) adalah graf G_1 = (V_1,E_1) dengan $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Contoh :



Gambar 6 (a) Graf G

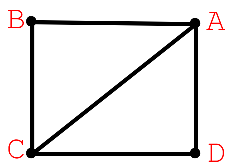


Gambar 6 (b) Graf G_1
(anak graf dari G)

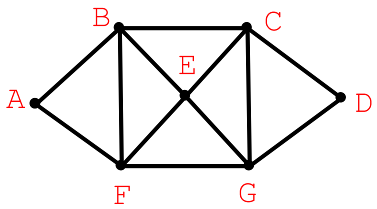
Graf Semi Euler dan Graf Euler

Pada awal tulisan ini sudah dipaparkan tentang sejarah graf yang dimulai dengan masalah Jem-batan Königsberg. Perjalanan mele-wati setiap Jembatan Königsberg sebanyak sekali dan kembali ke tempat keberangkatan membentuk sirkuit yang diberi nama sirkuit Euler. Jika perjalanan melewati ketujuh jembatan itu titik harus kembali ke tempat keberangkatan maka akan membentuk lintasan Euler. Sehingga lintasan Euler ada-lah lintasan yang melalui masing-masing sisi dalam graf tepat satu kali. Sedangkan sirkuit Euler ada-lah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut graf Euler (*Eulerian graph*) dan graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan graf semi-Euler (*semi-Eulerian graph*).

Contoh:



Gambar 7 (a) Graf semi-Euler tak berarah



Gambar 7 (b) Graf Euler tak berarah

Lintasan Euler pada graf Gambar 7 (a) : C, A, B, C, D, A. Sirkuit Euler pada graf Gambar 7 (b) : A, B, C, D, G, C, E, G, F, E, B, F, A.

Syarat perlu dan cukup me-ngenai keberadaan lintasan Euler maupun sirkuit Euler di dalam sua-tu graf ternyata sangat sederhana. Euler menemukan syarat tersebut ketika memecahkan masalah Jemba-tan Königsberg.

Hasil penemuan Euler ten-tang keberadaan lintasan Euler dipaparkan kembali oleh Liu, C L (1985) sebagai berikut:

Suatu graf tak berarah memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika ia terhubung (connected) dan memiliki nol atau dua simpul berderajat ganjil.

Pembuktian penyataan tersebut adalah:

Pembuktian untuk syarat perlu. Misalkan G memiliki lin-tasan Euler, G jelas terhubung. Jika lintasan Euler dilalui, maka pada setiap simpul terdapat dua sisi yang ber-*incident*, kecuali pada simpul awal dan simpul akhir. Jadi setiap simpul selain simpul awal dan sim-pul akhir harus berderajat genap. Jika simpul awal dan simpul akhir sama maka terbentuk sirkuit Euler.

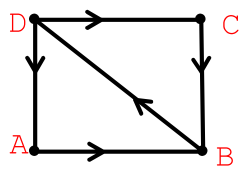
Pembuktian untuk syarat cukup. Misal dibuat lintasan Euler mulai dari salah satu dari dua simpul yang berderajat ganjil dan akan melewati semua sisi pada graf itu sehingga tidak ada sisi yang dilewati lebih dari sekali. Untuk simpul yang berderajat genap, bila lintasan itu masuk ke simpul me-lewati sebuah sisi, maka ia selalu bisa meninggalkan simpul itu melewati sisi yang lain.Sehingga ketika pembuatan lintasan berakhir, pasti telah sampai pada simpul yang berderajat ganjil lainnya. Jika semua sisi didalam graf itu dilewati dengan cara ini maka jelas akan diperoleh lintasan Euler. Jika tidak semua sisi di dalam graf itu terl-ewati, sisi-sisi yang tidak terlewati itu dianggap sebagai anak graf, sehingga semua simpul yang terda-pat dalam anak graf ini berderajat genap. Dengan diawali dari salah satu simpul pada anak graf tersebut, sekali lagi dibuat lintasan yang melalui semua sisi-sisi pada anak graf. Karena semua simpul berde-rajat genap, maka pasti lintasan pada anak graf itu akan kembali ke simpul awal. Dari penggabungan lintasan yang pertama dan kedua akan diperoleh lintasan yang bera-wal dan berakhir pada simpul yang berderajat ganjil. Jika diperlukan, cara ini dapat diulang sampai diperoleh lintasan yang melalui semua sisi pada graf tersebut.

Berdasarkan hasil teori ten-tang keberadaan lintasan Euler di atas, akan diperoleh akibat bahwa graf tak berarah G adalah graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpulnya berderajat genap. Sehingga jelaslah masalah Jembatan Königsberg bah-wa tidak mungkin melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula karena jika Jem-batan Königsberg direpresentasikan dalam sebuah graf, graf tersebut tidak memiliki sirkuit Euler dise-babkan semua simpulnya berderajat ganjil.

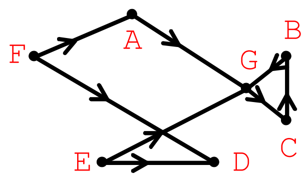
Lintasan dan sirkuit Euler juga terdapat pada graf berarah. Berikut pemaparan Rinaldi Munir (2001) tentang keberadaan lintasan dan sirkuit Euler pada graf berarah:

Graf berarah G memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika G terhu-bung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama. G memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.

Contoh :



Gambar 8 (a) Graf semi-Euler yang berarah



Gambar 8 (b) Graf Euler yang berarah

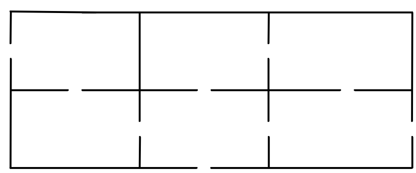
Lintasan Euler pada graf Gambar 8 (a) : D, A, B, D, C, B.
Sirkuit Euler pada graf Gambar 8 (b) : A, G, C, B, G, E, D, F, A.

Penerapan Graf Semi-Euler dan Graf-Euler

Selain digunakan dalam permasalahan jembatan Königs-berg, graf Euler juga dapat digu-nakan untuk menyelesaikan perma-salahan yang lain diantaranya yang akan dibahas adalah jalur pengun-jung pameran dan permasalahan tukang pos.

1. Jalur pengunjung pameran

   Contoh sederhana dari masalah ini adalah misalkan pada suatu gedung terdapat enam stan yang akan diguna-kan untuk pameran. Masing-masing stan dihubungkan oleh beberapa pintu dengan stan yang lain, lebih jelasnya denah gedung seperti gambar berikut:

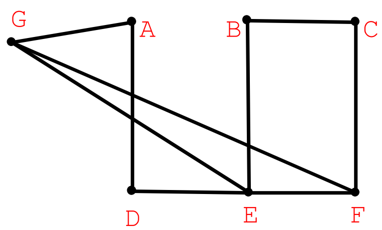


Gambar 9

   Permasalahannya ada-lah apakah mungkin setiap pengunjung pameran dapat melihat semua stan tanpa harus melewati jalan yang sama dan jika mungkin bagaimana jalur tersebut. Permasalahan ini da-pat diselesaikan dengan meng-gunakan graf, masing-masing stan diwakili oleh simpul dan pintu yang menghubungkan antara dua stan diwakili oleh sisi. Sehingga permasalahan ini adalah apakah di dalam graf tersebut terdapat lintasan Euler, jika terdapat bagaimana contoh lintasan Eulernya.

Representasi graf Gambar 9:

Gambar10

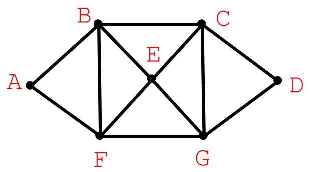


Dari representasi graf yang diperoleh, terdapat dua simpul berderajat ganjil yaitu simpul G dan F, sedangkan simpul yang lainnya berderajat genap. Sesuai dengan syarat keberadaan lintasan Euler pada penjelasan sebelumnya, maka pasti terdapat lintasan Euler pada graf tersebut atau setiap pengunjung pameran dapat melihat semua stan tanpa melewati jalan yang sama un-tuk denah tempat pameran seperti pada gambar 9. Salah satu jalur yang dapat dilewati oleh pengunjung adalah masuk ke stan A, stan D, stan E, stan B, stan C, stan F, kemudian keluar.

2. Permasalahan tukang pos

Permasalahan ini perta-ma kali dikemukakan oleh Mei Gan (dari Cina) pada tahun 1962. Ia mengemukakan per-masalahan yaitu seorang tu-kang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagai-mana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia mele-wati setiap jalan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.

Permasalahan ini tidak lain adalah menentukan sirkuit Euler di dalam graf yang mere-presentasikan peta jalan tempat tukang pos mengantar surat. Jika grafnya merupakan graf Euler maka, maka sirkuit Eulernya mudah ditentukan. Tetapi jika grafnya bukan graf Euler maka yang dapat diten-tukan adalah lintasan Eulernya saja.



Gambar 11. Graf untuk permasalahan tukang pos Cina

Graf pada gambar 11 merupakan graf Euler karena derajat setiap simpul pada graf tersebut adalah genap, sehingga dapat ditentukan sirkuit Eu-lernya. Salah satu alternatif rute yang dapat ditempuh oleh tukang pos Cina supaya ia melewati setiap jalan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal keberang- katan adalah A, B, C, D, E, F, C, E, B, F, A.

Penutup

Permasalahan Jembatan Kö-nigsberg yaitu apakah mungkin melalui ketujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai Pregal di Kota Königsberg sekarang bernama Kota Kaliningrat (sebelah timur Prussia, Jerman sekarang) masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula adalah tidak mungkin.

Permasalahan ini telah da-pat dipecahkan oleh seorang mate-matikawan Swiss, L. Euler pada tahun 1736. Euler mere presen-tasikan Jembatan Königsberg da-lam suatu graf. Masing-masing jembatan diwakili oleh sisi dan daratan yang dihubungkan oleh jembatan diwakili oleh simpul. Sehingga permasalahan Jembatan Königsberg adalah apakah pada graf tersebut dapat dibuat sirkuit Euler. Menurut Euler syarat kebe-radaan sirkuit Euler adalah grafnya harus merupakan graf terhubung dan derajat setiap simpulnya genap. Ternyata pada graf tersebut derajat setiap simpulnya ganjil sehingga tidak dapat dibuat sirkuit Euler atau orang tidak mungkin dapat mele-wati jembatan itu masing-masing sekali untuk kembali ke tempat semula.

Daftar Pustaka

Bondy, J.A & Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. London : The Macmilan Press

Liu, C.L. 1985. *Element of Discrete Mathematics*. McGraw-Hill

Rinaldi Munir. 2001. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informa-tika