

DASAR-DASAR GEOMETRI

Suatu Pengantar Mempelajari Sistem-sistem Geometri

Budiyono

Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Dengan memandang geometri sebagai sistem deduktif, geometri dapat disebut sebagai suatu sains deduktif. Dengan berawal pada pengertian pangkal, definisi dan postulat-postult itu menentukan macam geometri. Dengan memandang geometri sebagai sistem deduktif yang didasarkan atas himpunan postulat, yang dapat dianggap sebagai aturan permainannya, maka jika postulat itu diganti akan didapat geometri yang lain.

Kata Kunci: *deduktif, postulat, system geometri*

Pendahuluan

Awal geometri bermula dari zaman prasejarah, ketika itu penduduk suatu daerah berkembang, tempat tinggal alamiah yang tersedia tidak cukup. Orang perlu membangun tempat perlindungan yang cukup besar untuk menampung keluarga dan kuat untuk menahan angin, hujan dan badai. Untuk membuat tempat berlindung dengan ukuran yang tepat, seseorang harus membandingkan ukuran panjang. Jadi, atap harus terletak lebih tinggi di

atas tanah dari pada ujung kepala orang paling tinggi.

Perintis geometri adalah orang Babilonia purba. Tanah antara sungai Trigis dan Eufkrat, tempat tinggal orang Babilonia, semula berupa rawa. Kanal-kanal dibangun untuk mengeringkan rawa itu dan untuk menampung luapan air sungai. Untuk maksud pembangunan kanal, mereka perlu meneliti tanah. Dalam melakukan penelitian itu, orang Babilonia menciptakan aturan-aturan untuk mencari luas tanah. Aturan-aturan ini tidak terperinci benar,

tetapi pengetahuan yang mereka peroleh cukup untuk pembangunan kanal.

Di Mesir, orang mempunyai ladang pertanian di sepanjang sungai Nil dikenakan pajak sesuai dengan tanah milik mereka. Dalam musim penghujan, sungai Nil akan meluap mengenai tanah itu, dan menghancurkan semua tanda-tanda batas pe-milikan tanah. Oleh karena itu, orang perlu mengukur lagi tanah sehingga masing-masing pemilik akan memperoleh bagian mereka yang sah. Setelah banjir surut, orang yang telah dilatih secara khusus disebut tukang perentang tali akan menetapkan petunjuk batas baru. Mereka menggunakan simpul-simpul tali berjarak sama, sehingga mereka dapat mengukur panjang yang diinginkan dan membagi tanah itu ke dalam bentuk-bentuk segitiga, segiempat, persegi panjang, dan trapezium.

Mereka menciptakan aturan-aturan yang praktis untuk mengukur luas bentuk-bentuk itu. Aturan-aturan itu beraneka ragam dan bersifat

garis besar dan sering tidak tepat. Seperti yang kita ketahui sekarang, misalnya, bahwa luas setiap segitiga adalah setengah hasil kali alas dan tingginya. Orang Mesir secara salah memberikan ukuran luas segitiga ini sebagai setengah hasil kali alasnya dengan sebuah sisi. Sebagian besar dari segitiga-segitiga yang panjang dan sempit, dan dalam segitiga seperti itu tidak terdapat perbedaan antara panjang sisi dan tingginya. Oleh karena itu, hasil dari perhitungan orang Mesir berguna sekali sebagai dasar pembagian tanah dan penarikan pajak terhadap pemiliknya.

Geometri Menjadi Sebuah Disiplin Ilmu.

Orang Yunani menamakan pengukur tanah bangsa Mesir zaman dahulu para geometer atau pengukur tanah. Geometri berasal dari bahasa Yunani 'ge' artinya tanah dan 'metria' artinya ukuran. Pengukur tanah menemukan banyak fakta tentang segitiga, bujur-sangkar, empat persegi panjang, dan bahkan

lingkaran. Fakta ini menjadi ilmu yang oleh orang Yunani disebut 'geometri' atau 'ilmu tentang ukuran tanah'. Geometri dewasa ini lebih luas daripada tahap awalnya, tetapi ilmu ini masih menyangkut ukuran, bentuk, dan kedudukan benda-benda.

Orang Yunani membuat kemajuan penting dalam bidang geometri. Mereka tidak hanya mengoreksi aturan-aturan orang Mesir yang salah, tetapi juga mempelajari berbagai bentuk geometri agar dapat menyusun hubungan-hubungannya. Thales, seorang ahli matematika Yunani yang hidup kira-kira 2500 tahun yang lalu, menemukan bahwa setiap garis tengah ditarik dalam sebuah lingkaran akan membagi lingkaran menjadi dua buah setengah lingkaran. Dia juga mengamati bahwa jika 2 garis lurus memotong satu sama lain, maka sudut yang bertolak belakang selalu sama, tidak menjadi soal sudut apapun yang dibentuk oleh garis itu. Hal ini merupakan permulaan perhitungan angka-angka untuk menghitung

tanah milik mereka, bukan untuk penggunaan secara praktis. Orang Yunani mengubah geometri dari pengkajian tentang hubungan antara bagian dari bentuk-bentuk yang ada dalam ruang. Hal ini yang sekarang dimaksud dengan geometri.

Setelah Thales, ahli matematika Yunani yang lain menemukan dan membuktikan fakta-fakta tentang bentuk-bentuk geometri. Mereka mengemukakan fakta-fakta itu dalam pernyataan-pernyataan yang disebut dalil atau teorema. Mereka juga menciptakan berbagai alat untuk menggambar bentuk. Biasanya, alat-alat yang diperbolehkan dalam pengkajian geometri secara formal adalah penggaris yang tidak diberi tanda, untuk menggambar garis lurus, dan jangka untuk menggambar lingkaran dan memindahkan ukuran.

Orang Yunani mengemukakan berbagai soal konstruksi, untuk dipecahkan hanya menggunakan penggaris dan jangka. Di antara soal-soal ini adalah sebagai berikut :

1. Membuat suatu bujur sangkar yang luasnya tepat sama dengan luas sebuah lingkaran yang diketahui, biasa disebut membujursangkarkan lingkaran.
2. Membuat sisi sebuah kubus yang sisinya akan tepat 2 kali lipat isi kubus diketahui, biasa disebut menduplikasikan kubus.
3. Membuat sebuah sudut yang besarnya sama dengan sepertiga besar suatu sudut yang diketahui, biasa disebut membagi tiga sudut.

Selama lebih dari 20 abad, ahli matematika berusaha memecahkan soal itu, tanpa berhasil. Akhirnya, dalam abad XIX dibuktikan bahwa kita tidak mungkin membujur-sangkarkan lingkaran, menduplikasikan kubus, atau membagi tiga sebuah sudut. Kita mungkin membuat ketiga kontruksi ini dengan alat yang dirancang secara khusus. Kontruksi sedemikian itu termasuk dalam bidang geometri tinggi.

Geometri Sebagai Suatu Sistem Deduktif

Telah disebutkan di atas bahwa geometri menurut sejarahnya tumbuh pada zaman sebelum Masehi karena keperluan pengukuran tanah setiap kali sesudah sungai Nil di Mesir banjir. Dalam Bahasa Indonesia Geometri diterjemahkan sebagai ilmu Ukur. Geometri dapat didefinisikan sebagai cabang Matematika yang mempelajari titik, garis, bidang dan benda-benda ruang serta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya dan hubungannya satu sama lainnya. Jadi, Geometri dapat dipandang sebagai suatu studi yang mempelajari tentang ruang fisik.

Kita telah mengetahui apa yang disebut garis, segitiga, jajaran genjang, persegi panjang, bujur sangkar, belah ketupat, trapezium, kubus, bola, kerucut, prisma dan sebagainya. Bangun-bangun atau benda-benda itu perlu didefinisikan dan untuk mendefinisikan sesuatu diperlukan pengertian-pengertian sebelumnya. Jadi, tidak mungkin semuanya didefinisikan. Untuk

menghindari lingkaran dari definisi perlu adanya pengertian-pengertian pangkal atau unsur-unsur yang tidak didefinisikan.

Contoh dari suatu lingkaran definisi:

Titik adalah perpotongan dua garis.

Garis adalah penghubung dua titik.

Suatu definisi harus dapat dinyatakan dalam bentuk kalimat yang memuat “bila dan hanya bila” atau dapat dibalik misalnya :

Suatu segitiga sama sisi adalah suatu segitiga yang ketiga sisinya sama.

Ini harus berarti :

Jika suatu segitiga sama sisi, maka ketiga sisinya sama.

Jika suatu segitiga sisinya sama, maka segitiga itu sama sisi.

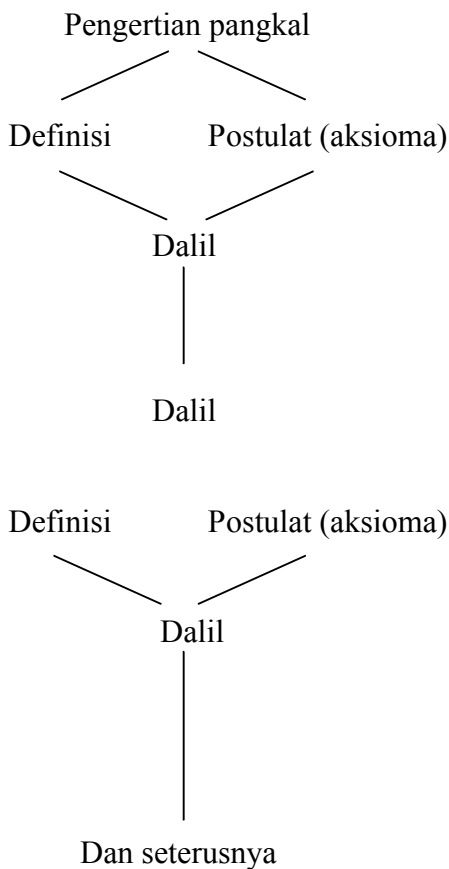
Mengingat perlu adanya unsur-unsur yang tidak didefinisikan, maka tidak semua relasi dapat didefinisikan. Jadi harus ada relasi yang tidak didefinisikan. Unsur-unsur dan relasi-relasi yang tidak didefinisikan disebut pengertian pangkal.

Geometri dapat dipandang sebagai suatu sistem deduktif. Dalam suatu sistem deduktif harus ada

pengertian-pengertian pangkal, yaitu unsur-unsur dan relasi-relasi yang tidak didefinisikan. Masih diperlukan pula definisi-definisi dari unsur-unsur lain dengan menggunakan pengertian pangkal tersebut.

Definisi memungkinkan kita memberi nama pada unsur-unsur sehubungan dengan pengertian pangkal itu. Selain itu harus ada relasi-relasi atau pernyataan yang dapat diterima tanpa bukti yang dinamakan sebagai asumsi atau aksioma atau postulat. Relasi-relasi lainnya yang dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi atau postulat-postulat itu dinamakan dalil atau teorema.

Proses untuk mendapatkan atau menurunkan suatu dalil dari himpunan pengertian pangkal, definisi dan postulat disebut suatu deduksi. Jadi, sistem deduktif mempunyai sejumlah pengertian pangkal, definisi, postulat, dan teorema-teorema. Gambaran sistem deduktif dapat disajikan sebagai berikut:



Dalam Geometri sebagai suatu sistem deduktif himpunan postulat itu dipandang sebagai “aturan permainan”.

Himpunan postulat harus konsisten, artinya tidak boleh ada 2 pernyataan yang bertentangan. Demikian pula tidak boleh ada 2 dalil yang bertentangan. Demikian pula tidak boleh ada 2 dalil yang bertentangan yang diturunkan dari himpunan postulat itu.

Dalam Geometri harus hanya ada satu presentasi yang memenuhi satu himpunan postulat itu atau jika ada dua, tentu keduanya harus isomorphic. Dikatakan himpunan postulat itu harus “categorical”.

Dalam Geometri kita akan memperhatikan kesimpulan-kesimpulan dan akibat-akibat dari himpunan postulat itu dan tidak memperhatikan artinya dalam ruang hidup kita.

Geometri Euclides

Geometri yang pertama-tama dapat dipandang sebagai suatu sistem deduktif adalah Geometri dan Euclides. Geometri Euclides ini bertahan selama hampir 2000 tahun.

Matematikawan yang bernama Euclides ini berasal dari Aleksandria. Euclides hidup kira-kira 300 tahun sebelum Masehi. Dia menulis bukunya sebanyak 13 buah dengan mengumpulkan materinya dari beberapa sumber dan dari tokoh-tokoh sebelumnya. Euclides adalah penulis dan penyusun buku yang sangat luar biasa, bukunya

disebut “The Elements” atau “Euclid’s Elements” yang dapat diterjemahkan ke dalam Bahasa Indonesia sebagai “Unsur-unsur Euclides”.

Buku-buku Euclides itu adalah sebagai berikut :

Enam buah bukunya yang pertama membicarakan tentang segitiga, segiempat, lingkaran, segibanyak, perbandingan dan kesebangunan. Empat buah buku berikutnya membicarakan ilmu bilangan satu buah buku (yang ke 11) memperkenalkan geometri ruang yang berhubungan dengan buku yang pertama. Buku yang ke 12 adalah sebuah buku membahas limas, kerucut dan tabung. Satu buah bukunya lagi yaitu yang ke-13 membicarakan bidang banyak beraturan dan memberikan konstruksi dari benda-benda “platonic” atau benda-benda ‘cosmic’. Benda-benda ini disebut benda “cosmic” karena menurut teori Plato ada hubungan antara kubus dan tanah, bidang empat (tetrahedron) dan api, bidang delapan (octahedron) dan

udara, bidang dua puluh (tetrahedron) dan air, dan ada yang menambahkan bidang dua belas (dedecahedron) dan ether.

Euclides, dalam bukunya yang pertama mulai dengan 23 definisi, 5 postulat, 5 aksioma dan 48 dalil. Euclides membedakan antara postulat dan aksioma, postulat berlaku khusus untuk sains tertentu dan aksioma berlaku untuk umum.

Definisi-definisi sebanyak 23 itu dapat disajikan sebagai berikut:

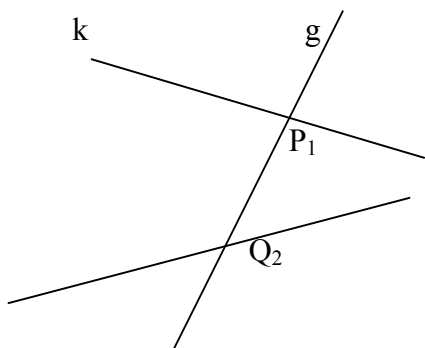
1. Titik adalah yang tidak mempunyai bagian.
2. Garis adalah panjang tanpa lebar.
3. Ujung-ujung suatu garis adalah titik.
4. Suatu garis lurus adalah suatu garis yang terletak rata dengan titik-titik padanya.
5. Suatu bidang adalah yang hanya mempunyai panjang dan lebar.
6. Ujung-ujung suatu bidang adalah garis.
7. Suatu bidang datar adalah suatu bidang yang terletak rata dengan garis-garis padanya.

8. Suatu sudut datar adalah inklinasi (kemiringan) sesamanya dari dua garis dalam suatu bidang datar yang bertemu dan tidak terletak pada suatu garis lurus.
9. Dan jika garis-garis yang memuat sudut itu lurus, maka sudut itu disebut sudut garis lurus.
10. Jika suatu garis lurus berdiri pada suatu garis lurus dan membuat sudut yang bersisian sama, masing-masing sudut ini disebut siku-siku dan garis yang berdiri pada garis lainnya tadi disebut tegak lurus pada garis yang lain.
11. Suatu sudut tumpul adalah sudut yang lebih besar dari sudut siku-siku.
12. Suatu sudut lancip adalah yang lebih kecil dari suatu sudut siku-siku.
13. Suatu batas adalah ujungnya (akhirnya) sesuatu.
14. Suatu bangun adalah sesuatu yang termuat dalam suatu batas atau beberapa batas.
15. Suatu lingkaran adalah suatu bangun datar yang termuat dalam suatu garis sedemikian, hingga semua garis lurus yang melalui satu titik dalam hubungan itu dan mengenai garis tadi sama panjangnya.
16. Dan titik itu disebut titik pusat lingkaran.
17. Suatu garis tengah dari lingkaran adalah sebarang garis lurus melalui titik pusat dan pada kedua arahnya berakhir pada keliling lingkaran dan garis semacam itu membagi dua sama lingkaran itu.
18. Suatu setengah lingkaran adalah bangun yang termuat dalam suatu garis tengah dan keliling lingkaran yang terbagi oleh garis tengah itu. Titik pusat setengah lingkaran sama dengan titik pusat lingkaran.
19. Bangun-bangun garis lurus adalah bangun-bangun yang termuat dalam garis-garis lurus atau dibatasi garis lurus. Bangun-bangun trilateral adalah yang dibatasi oleh tiga, quadrilateral dibatasi oleh empat dan multilateral dibatasi oleh empat dan

- multilateral dibatasi oleh lebih dari empat garis.
20. Dari bangun-bangun trilateral (sisi tiga), suatu segitiga sama-sisi adalah yang mempunyai tiga sisi sama, suatu segitiga sama kaki adalah yang hanya dua sisinya sama dan suatu segitiga miring adalah yang semua sisinya tidak sama.
 21. Selanjutnya dari bangun-bangun segitiga, suatu segitiga siku-siku adalah yang mempunyai suatu sudut siku-siku, suatu segitiga tumpul yang mempunyai suatu sudut tumpul dan suatu segitiga lancip adalah yang ketiga sudutnya lancip.
 22. Dari bangun-bangun segiempat, suatu bujur sangkar adalah yang sama sisi dan bersudut siku-siku, suatu empat persegi panjang adalah yang bersudut siku-siku, tetapi tidak samasisi, suatu belah ketupat adalah yang sama sisi, tetapi tidak bersudut siku-siku, suatu jajarn genjang adalah sama sisinya dan sudut-sudutnya yang berhadapan sama, tetapi empat yang lain dari ini semua disebut trapesium.
 23. Garis-garis lurus sejajar atau parallel adalah garis-garis lurus yang terletak dalam suatu bidang datar dan jika diperpanjang tak terbatas pada kedua arahnya tidak akan bertemu pada arah yang manapun.
- Postulat-postulat sebanyak 5 buah dari Euclides itu dapat ditulis sebagai berikut:
- Postulat 1 : Menarik garis lurus dari sebarang titik ke sebarang titik yang lain.
- Postulat 2 : Memperpanjang suatu ruas garis secara kontinu menjadi garis lurus
- Postulat 3 : Melukis lingkaran dengan sebarang titik pusat dan sebarang jarak.
- Postulat 4 : Bahwa semua sudut siku-siku adalah semua sama.
- Postulat 5 : Bahwa jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak

terbatas, akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

Postulat yang ke 5 ini dapat diberi keterangan sebagai berikut:



Garis g memotong garis k dan l . Sudut P_1 ditambah sudut Q_2 kurang dari dua sudut siku-siku. Jika garis k dan l diperpanjang akan berpotongan di pihak tempat sudut P_1 dan sudut Q_2 (dipihak kanan pada gambar di atas).

Selanjutnya 5 buah aksioma dari Euclides dapat disajikan sebagai berikut:

Aksioma 1 : Benda-benda yang sama dengan suatu benda yang sama, satu sama lain juga sama.

Aksioma 2 : Jika sesuatu yang sama ditambah dengan

sesuatu yang sama, jumlahnya sama.

Aksioma 3 : Jika sesuatu yang sama dikurangi dengan sesuatu yang sama, sisanya sama.

Aksioma 4 : Benda-benda yang berimpit satu sama lain, satu sama lain sama.

Aksioma 5: Seluruhnya lebih besar dari bagiannya.

Beberapa Kelemahan Geometri Euclides

Geometri Euclides mempunyai beberapa kelemahan. Beberapa kelemahan itu adalah:

Kelemahan 1 :Euclides berusaha untuk mendefinisikan semuanya dalam Geometri, sampai titik dan garis.

Jika kita memperhatikan definisi Euclides yang pertama: “Titik adalah yang tidak mempunyai bagian, maka perlu didefinisikan apa yang dimaksud dengan bagian.

Dalam definisinya yang kedua: Garis adalah panjang tanpa lebar, maka perlu didefinisikan pula apa

yang dimaksud dengan panjang, apa pula yang dimaksud dengan lebar.

Demikian juga dalam beberapa definisinya yang lain. Tampak, bahwa memang harus ada pengertian-pengertian pangkal.

Kelemahan 2 : Postulat yang kelima dari Euclides yang terkenal dengan nama postulat Paralel terlalu panjang, sehingga merisaukan para matematikawan.

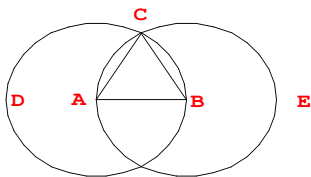
Beberapa matematikawan menganggap, bahwa postulat yang kelima itu bukan postulat dan dapat dibuktikan dengan keempat postulat yang lain. Usaha untuk membuktikan postulat kelima ini berlangsung sejak Euclides masih hidup kira-kira sekitar tahun 1820. Tokoh-tokoh yang berusaha untuk membuktikan ini antara lain Proclus dari Aleksadria (410–485), Girolamo Saccheri dari Italia (1607–1733), Karl Friedrich Gauss dari Jerman (1777–1855), Wolfgang Bolyai (1802–1860) dan juga Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793–1856).

Usaha-usaha ini tidak ada yang berhasil dan tampak keunggulan Euclides, tetapi usaha ini mengakibatkan ditemukannya Geometri lain yang sekarang disebut dengan geometri Non-Euclides.

Kelemahan 3 : Terdapat pada dalilnya atau proporsinya yang pertama yang berbunyi sebagai berikut. Pada suatu ruas garis dapat dilukis sesuatu segitiga sama sisi.

Misalkan AB ruas garis yang diketahui. Harus dilukis segitiga sama sisi pada garis AB.

Lukisan : Dengan titik A sebagai titik pusat dan jarak AB dapat dilukis lingkaran BCD (postulat 3). Demikian pula dengan titik B sebagai titik pusat dan jarak BA dapat dilukis lingkaran ACCE (postulat 3), dari titik C, yaitu titik potong kedua lingkaran itu dapat ditarik garis-garis lurus CA dan CB.



Bukti :

Karena titik A adalah titik pusat lingkaran CDB, maka AC sama dengan AB (definisi 15). Demikian pula, karena titik B titik pusat lingkaran ACE maka BC sama dengan BA (definisi 15). Tetapi CA juga terbukti sama dengan AB. Dan benda-benda yang sama dengan yang sama, satu sama lain sama (aksioma 1). Jadi juga CA sama dengan CB. Demikian juga ketiga garis CA, AB dan BC satu sama lain sama. Maka segitiga ABC sama sisi dan ini terlukis pada ruas garis AB.

Kelemahan dari dalil ini adalah, bahwa Euclides menganggap begitu saja bahwa kedua lingkaran itu berpotongan, tanpa menggunakan atau mendasarkan pada suatu postulat. Untuk memperoleh titik

potong kedua lingkaran ini masih perlu menggunakan pertolongan prinsip kontinuitas.

Perkembangan Geometri

Materi Geometri Euclides dikumpulkan dari beberapa sumber, maka dari geometri Euclides ini dapat diambil intinya yaitu berupa dua geometri yang berbeda dalam dasar logikanya, pengertian pangkal dan aksiomanya. Kedua geometri itu adalah Geometri Affine dan Geometri Absolut atau Geometri Netral.

Geometri Affine pertama-tama diperkenalkan oleh Leonhard Euler dari Jerman (1707 – 1793). Dalam Geometri Affine garis sejajar tunggal, sesuai dengan postulat Playfair, memegang peranan yang sangat penting. Karena dalam Geometri Affine ini lingkaran tidak pernah diukur, maka dapat dikatakan bahwa Geometri Affine mempunyai dasar postulat 1, 2 dan 5 dari postulat Euclides. Postulat 3 dan 4 tidak berarti sama sekali.

Geometri Absolut pertama kali diperkenalkan oleh Y. Bolyai (1802

– 1860). Geometri Absolut ini didasarkan pada postulat 1, 2, 3, dan 4 dari Euclides dan melepaskan postulat yang ke 5 dari Euclides.

Jika kita perhatikan, maka Geometri Affine dan Geometri Absolut mempunyai dasar persekutuan dua postulat pertama dari Euclides. Ada pula inti dari teorema-teorema yang berlaku untuk Geometri Affine dan Geometri Absolut mempunyai dasar persekutuan dua postulat pertama dari Euclides. Ada pula inti dari teorema-teorema yang berlaku untuk Geometri Affine dan Geometri Absolut, yaitu pengertian keantaraan (“intermediacy”). Pengertian keantaraan ini terkandung dalam definisi keempat dari Euclides. Definisi keempat dari Euclides itu adalah:

Suatu garis lurus (ruas garis) adalah terletak rata dengan titik-titik padanya, atau Suatu garis lurus (ruas garis) adalah yang terletak rata antara ujung-ujungnya.

Pengertian ini memberikan kemungkinan untuk memandang keantaraan sebagai pengertian pangkal yaitu

sebagai relasi yang tidak didefinisikan. Pengertian ini dipergunakan untuk mendefinisikan ruas garis sebagai himpunan titik-titik antara dua titik yang diketahui. Kemudian ruas garis dapat diperpanjang menjadi garis tak berhingga. Jika B terletak antara A dan C, dapat dikatakan bahwa A, B dan C terletak berurutan pada garis itu.

Geometri yang menjadi dasar dari Geometri Affine dan Geometri Absolut ini disebut Geometri “Ordered” (Geometri Terurut), karena urutan-urutan memegang peranan penting. Geometri Terurut ini berdasarkan pada dua postulat yang pertama dari Euclides, tetapi penyajiannya lebih teliti.

Memperhatikan hal-hal di atas, maka Geometri Affine dan Geometri Absolut termuat dalam Geometri Terurut, sedangkan Geometri Euclides termuat dalam Geometri Affine dan Geometri Absolut.

Seperti telah ditulis di depan, bahwa Geometri Non – Euclides timbul karena para matematikawan berusaha untuk membuktikan pos-

tulat kelima dari Euclides. Geometri Euclides sebenarnya masih berdasarkan empat postulat pertama dari Euclides dan hanya berbeda pada postulat kelimanya. Dengan demikian Geometri Non – Euclides termuat dalam Geometri Absolut.

Geometri Non – Euclides ada 2 macam. Yang pertama adalah yang ditemukan dalam waktu yang hampir bersamaan oleh 3 tokoh berlainan dan masing-masing bekerja sendiri. Tokoh-tokoh itu adalah Karl Friedrich Gauss dari Jerman, Yonos Bolyai dari Hongaria dan Nicolai Ivanovitch Lobachevsky dari Rusia. Geometri ini disebut Geometri hiperbolik atau terkenal juga dengan nama Geometri Loba-chevsky.

Geometri Non – Euclides yang kedua adalah Geometri yang ditemukan oleh G.F.B. Bernhard Riemann (1826 – 1866) dari Jerman. Geometri yang ditemukan oleh Riemann ini disebut Geometri Elliptik atau Geometri Riemann.

Felix Klien (1849 – 1925) dari Jerman mempunyai pendapat yang lain tentang Geometri. Ia memberi-

kan definisi Geometri sebagai berikut. Suatu Geometri didefinisikan oleh suatu group dari transformasi-transformasi, jika definisi dan dalil-dalilnya yang berlaku untuk sifat-sifat dari bangunan itu “invariant” (tidak berubah) oleh transformasi-transformasi dari G , tetapi tidak “invariant” oleh transformasi dari group lain yang mana saja yang memuat G .

Kita telah mengenal bermacam-macam transformasi antara lain translasi, rotasi, refleksi, refleksi geser, identitas dan dilatasi. Semua transformasi itu adalah anggota dari group transformasi-transformasi lainnya, misalnya transformasi affine, transformasi proyektif dan sebagainya, yang bukan anggota group transformasi Geometri Euclides.

Menurut pandangan Felix Klein tentang Geometri, maka dapat digambarkan ikhtisar sebagai berikut: Transformasi Geometri Euclides termuat dalam group transformasi Geometri Affine. Demikian juga group transformasi

Geometri Affine, group transformasi Geometri Hiperbolik dan group transformasi Geometri Affine, group transformasi Geometri Eliptik masing-masing adalah suatu sub group dari group transformasi Geometri Proyektif dan yang terakhir ini adalah suatu sub group dari group transformasi Topologi.

Topologi adalah cabang Geometri yang paling umum, tetapi yang termuda, yang sekarang masih terus berkembang. Topologi lahir pada tahun 1895, tokoh-tokohnya antara lain Leonhard Euler (1707–1893), dari Jerman, Henri Poincare (1854–1912) dari Perancis dan George Cantor (1845 – 1918) dari Jerman.

Beberapa orang tokoh dari Geometri Proyektif antara lain Arthur Cayley (1821–1895) dari Inggris, Jean Victor Poncelet (1788–1867) dari Perancis dan K.G. Christian Von Christian Staudt (1798–1867) dari Jerman. Dapat dikatakan bahwa Geometri Proyektif mulai diakui sebagai sistem formal yang berdiri pada tahun 1859.

Penutup

Geometri dapat dipandang sebagai suatu sistem deduktif maka geometri dapat juga disebut suatu sains deduktif. Dalam geometri yang berawal pada pengertian pangkal, definisi dan postulat-postulat maka dapat diturunkan secara logis teorema-teorema dan seterusnya. Pengertian pangkal, definisi dan postulat-postulat itu menentukan macamnya geometri.

Geometri Euclides mempunyai banyak kelemahan, sehingga sekarang Geometri Euclides tidak dipandang lagi sebagai suatu sistem deduktif yang baik. Walaupun demikian Geometri Euclides tetap merupakan suatu karya besar, dan telah bertahan selama 2000 tahun. Tanpa adanya Geometri Euclides mungkin juga tidak akan timbul geometri-geometri yang lain.

Geometri adalah suatu ilmu yang berkembang, jika semula hanya dikenal Geometri Euclides saja, maka dalam abad 20 ini sudah dikenal macam-macam geometri.

Daftar Pustaka

- Coxeter, H.S.M. 1967. *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Meserve, Bruce E. 1959. *Fundamental Concepts of Geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Moeharti, Hw. 1986. *Sistem-Sistem Geometri*. Jakarta: Penerbit Karunika
- Prenowitz, Walter: Jordan, Meyer. 1965. *Basic Concepts of Geometry*. London: Blais-dell Publishing Company.
- Rawuh, 1988. *Geometri*. Jakarta: Penerbit Karunika